Intégration 1
Licence 2$^{\mathrm{e}}$ *année*

Jean-Yves Briend

Université Aix-Marseille 1

Ubiquité de l’intégrale

L’intégration est au cœur de l’analyse mathématique.

Ubiquité de l'intégrale

L'intégration est au cœur de l'analyse mathématique.

- Utilisée dans tous les domaines des mathématiques :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int_\Omega \omega = \int_{\partial\Omega} \omega \ldots$$

Ubiquité de l’intégrale

L’intégration est au cœur de l’analyse mathématique.

- Utilisée dans tous les domaines des mathématiques :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int_\Omega \omega = \int_{\partial\Omega} \omega \ldots$$

- Utilisée dans tous les domaines de la physique :

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{e}^2}{\varepsilon} \int \frac{\Psi_{\mathrm{S}}^*(r_1)\Psi_{\mathrm{P}}^*(r_2)\Psi_{\mathrm{S}}(r_2)\Psi_{\mathrm{P}}(r_1)}{|r_1 - r_2|}\,\mathrm{d}r_1\,\mathrm{d}r_2.$$

Ubiquité de l'intégrale

L'intégration est au cœur de l'analyse mathématique.

- Utilisée dans tous les domaines des mathématiques :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int_\Omega \omega = \int_{\partial\Omega} \omega \ldots$$

- Utilisée dans tous les domaines de la physique :

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{e}^2}{\varepsilon} \int \frac{\Psi_\mathrm{S}^*(r_1)\Psi_\mathrm{P}^*(r_2)\Psi_\mathrm{S}(r_2)\Psi_\mathrm{P}(r_1)}{|r_1 - r_2|}\,\mathrm{d}r_1\,\mathrm{d}r_2.$$

- Et partout où l'on utilise les mathématiques : informatique, statistiques, biologie, démographie…

Première définition

Le théorème suivant constitue la seule définition que vous connaissiez de l'intégrale.

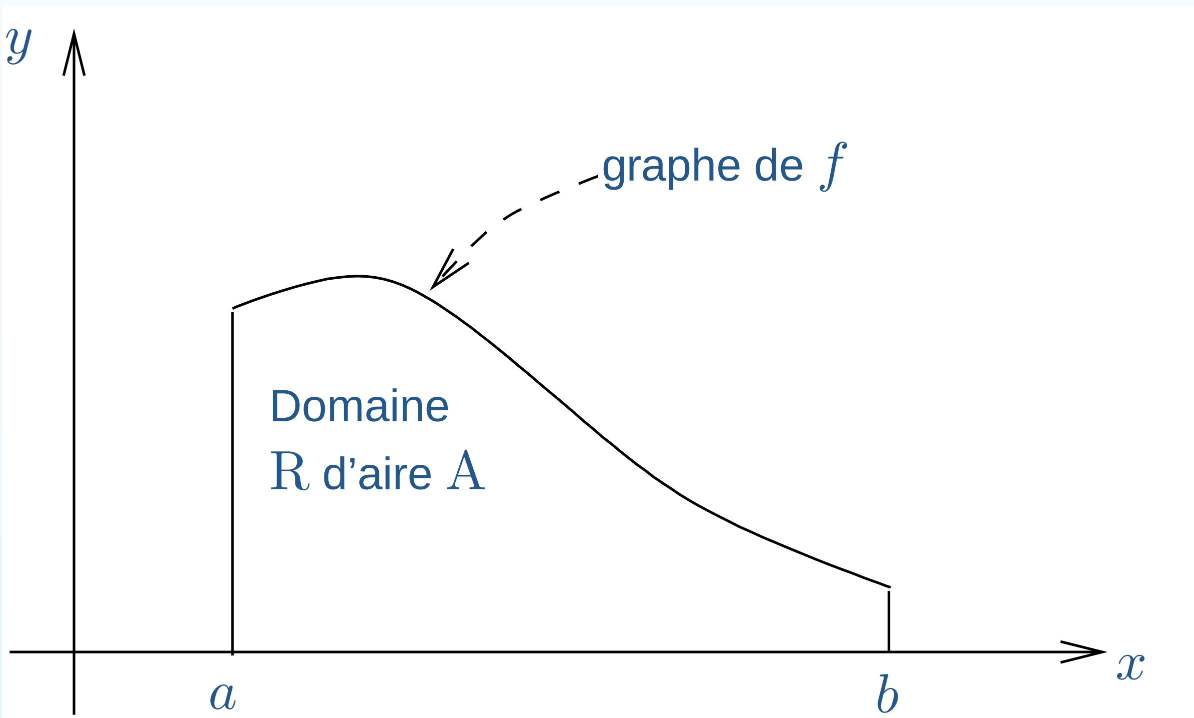
Première définition

Le théorème suivant constitue la seule définition que vous connaissiez de l'intégrale.

Théorème 0.1. — *Soit* f *une fonction continue et positive sur l'intervalle compact* $[a, b]$*. On appelle intégrale de* f *entre* a *et* b *l'aire* A *du domaine* R *compris entre l'axe des* x *et le graphe de* f*. On la note*

$$\mathrm{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dessin



Premiers problèmes

Cette définition a plusieurs défauts :

Premiers problèmes

Cette définition a plusieurs défauts :

- L’aire n’est pas bien définie.

Premiers problèmes

Cette définition a plusieurs défauts :

- L'aire n'est pas bien définie.
- Elle est inutilisable dès que l'on aborde des problèmes d'analyse plus corsés que ceux rencontrés au lycée.

Premiers problèmes

Cette définition a plusieurs défauts :

- L'aire n'est pas bien définie.
- Elle est inutilisable dès que l'on aborde des problèmes d'analyse plus corsés que ceux rencontrés au lycée.
- La classe des fonctions intégrables est toute petite.

Premiers problèmes

Cette définition a plusieurs défauts :

- L’aire n’est pas bien définie.
- Elle est inutilisable dès que l’on aborde des problèmes d’analyse plus corsés que ceux rencontrés au lycée.
- La classe des fonctions intégrables est toute petite.
- Elle ne donne aucune méthode pratique de calcul d’une intégrale.

Un théorème admis en terminale

On peut atténuer la conclusion du dernier point par le théorème suivant, que vous avez aussi admis :

Un théorème admis en terminale

On peut atténuer la conclusion du dernier point par le théorème suivant, que vous avez aussi admis :

Théorème 0.2. — *Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, alors elle y admet une primitive F. Toute autre primitive de f diffère de F par une constante. De plus, on a*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Aperçu historique, 1

Bernhard Riemann développe, vers le milieu du XIX$^{\mathrm{e}}$ siècle, une théorie rigoureuse de l'intégrale.

Aperçu historique, 1

Bernhard Riemann développe, vers le milieu du XIX$^{\mathrm{e}}$ siècle, une théorie rigoureuse de l'intégrale.

- Englobe les deux théorèmes ci-dessus.

Aperçu historique, 1

Bernhard Riemann développe, vers le milieu du XIX$^{\mathrm{e}}$ siècle, une théorie rigoureuse de l'intégrale.

- Englobe les deux théorèmes ci-dessus.
- Pas de fonctions intégrables compliquées (Dirichlet).

Aperçu historique, 1

Bernhard Riemann développe, vers le milieu du XIX$^{\text{e}}$ siècle, une théorie rigoureuse de l'intégrale.

- Englobe les deux théorèmes ci-dessus.
- Pas de fonctions intégrables compliquées (Dirichlet).
- Pas d'intervalles ou de fonctions non bornées (intégrales impropres).

Aperçu historique, 1

Bernhard Riemann développe, vers le milieu du XIX$^{\mathrm{e}}$ siècle, une théorie rigoureuse de l'intégrale.

- Englobe les deux théorèmes ci-dessus.
- Pas de fonctions intégrables compliquées (Dirichlet).
- Pas d'intervalles ou de fonctions non bornées (intégrales impropres).
- Mauvais comportement par approximation des fonctions : convergence forte ou hypothèses sur la limite.

Aperçu historique, 2

Henri Lebesgue, vers 1900, révolutionne la théorie de l'intégration.

Aperçu historique, 2

Henri Lebesgue, vers 1900, révolutionne la théorie de l'intégration.

- Pour remédier aux défauts de l'intégrale de Riemann, il invente l'intégrale qui porte aujourd'hui son nom.

Aperçu historique, 2

Henri Lebesgue, vers 1900, révolutionne la théorie de l'intégration.

- Pour remédier aux défauts de l'intégrale de Riemann, il invente l'intégrale qui porte aujourd'hui son nom.
- Généralise la théorie de Riemann.

Aperçu historique, 2

Henri Lebesgue, vers 1900, révolutionne la théorie de l'intégration.

- Pour remédier aux défauts de l'intégrale de Riemann, il invente l'intégrale qui porte aujourd'hui son nom.
- Généralise la théorie de Riemann.
- Théorie aujourd'hui universellement utilisée.

Aperçu historique, 2

Henri Lebesgue, vers 1900, révolutionne la théorie de l'intégration.

- Pour remédier aux défauts de l'intégrale de Riemann, il invente l'intégrale qui porte aujourd'hui son nom.
- Généralise la théorie de Riemann.
- Théorie aujourd'hui universellement utilisée.
- Son grand point fort : le théorème de convergence dominée.

Encore des problèmes

L'intégrale de Lebesgue a cependant elle aussi quelques défauts :

Encore des problèmes

L'intégrale de Lebesgue a cependant elle aussi quelques défauts :

- elle a des relations ambigües avec la dérivation.

Encore des problèmes

L'intégrale de Lebesgue a cependant elle aussi quelques défauts :

- elle a des relations ambigües avec la dérivation.
- Pas d'intégrales impropres semi-convergentes (typiques en théorie des nombres).

Encore des problèmes

L’intégrale de Lebesgue a cependant elle aussi quelques défauts :

- elle a des relations ambigües avec la dérivation.
- Pas d’intégrales impropres semi-convergentes (typiques en théorie des nombres).
- Difficile à mettre en œuvre : il est quasiment exclu de la présenter au niveau d’une deuxième année d’université.

Encore des problèmes

L'intégrale de Lebesgue a cependant elle aussi quelques défauts :

- elle a des relations ambigües avec la dérivation.
- Pas d'intégrales impropres semi-convergentes (typiques en théorie des nombres).
- Difficile à mettre en œuvre : il est quasiment exclu de la présenter au niveau d'une deuxième année d'université.

Va-t-on pour autant sombrer dans le désespoir ?

Aperçu historique, 3

À la fin des années 50, Jaroslaw Kurzweil et Ralph Henstock développent une variante de l'intégrale de Riemann, dite intégrale de jauge.

Aperçu historique, 3

À la fin des années 50, Jaroslaw Kurzweil et Ralph Henstock développent une variante de l'intégrale de Riemann, dite intégrale de jauge.

- Généralise les intégrales de Riemann et de Lebesgue.

Aperçu historique, 3

À la fin des années 50, Jaroslaw Kurzweil et Ralph Henstock développent une variante de l'intégrale de Riemann, dite intégrale de jauge.

- Généralise les intégrales de Riemann et de Lebesgue.
- Relations optimales avec la dérivation et la primitivation.

Aperçu historique, 3

À la fin des années 50, Jaroslaw Kurzweil et Ralph Henstock développent une variante de l'intégrale de Riemann, dite intégrale de jauge.

- Généralise les intégrales de Riemann et de Lebesgue.
- Relations optimales avec la dérivation et la primitivation.
- Admet toutes les intégrales impropres souhaitables.

Aperçu historique, 3

À la fin des années 50, Jaroslaw Kurzweil et Ralph Henstock développent une variante de l'intégrale de Riemann, dite intégrale de jauge.

- Généralise les intégrales de Riemann et de Lebesgue.
- Relations optimales avec la dérivation et la primitivation.
- Admet toutes les intégrales impropres souhaitables.
- Facile à mettre en œuvre.

Buts du cours

Deux buts principaux :

Buts du cours

Deux buts principaux :

- Méthodes pratiques de calcul (rôle des TD).

Buts du cours

Deux buts principaux :

- Méthodes pratiques de calcul (rôle des TD).
- Mise en place d'une théorie complète de l'intégrale des fonctions d'une variable réelle. Théorèmes de convergence de l'intégrale de Lebesgue, applications.

Plan du cours

- Aires & primitives.
- Fonctions intégrables, intégrale.
- Propriétés de base.
- Intégrales et primitives, méthodes pratiques de calcul.
- Intégrales «impropres».
- Mesure nulle.
- Les théorèmes de convergence. Applications.