

Note : la copie doit être bien présentée, lisible et propre. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction dans la note finale.

Question de cours

1. Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Rappeler les définitions de

- **jauge** sur $[a, b]$,
- **subdivision pointée** de $[a, b]$,
- **subdivision δ -fine**.

Réponse : Une *jauge* sur $[a, b]$ est une application de $[a, b]$ dans $]0, +\infty[$.

Une *subdivision pointée* de $[a, b]$ est la donnée d'intervalles $I_1 = [x_0, x_1]$, $I_2 = [x_1, x_2]$, $\dots$, $I_n = [x_{n-1}, x_n]$ avec $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$, et de réels $t_1 \in I_1$, $t_2 \in I_2$, $\dots$, $t_{n-1} \in I_{n-1}$, $t_n \in I_n$.

Elle est δ -fine si chaque intervalle I_k est inclus dans $\left[t_k - \frac{\delta(t_k)}{2}, t_k + \frac{\delta(t_k)}{2}\right]$.

2. Énoncer le théorème d'intégration par parties.

Réponse : Si les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $[a, b]$, alors $u'v$ est intégrable si et seulement si uv' l'est, et dans ce cas on a la formule

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'.$$

Exercices

1. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_0^1 f(x) \, dx = 1/2.$$

Montrer qu'il existe un point x de $[0, 1]$ tel que $f(x) = x$.

Réponse : On utilise la fonction $g(x) = f(x) - x$. Par le théorème de la moyenne, il existe $c \in [0, 1]$ tel que

$$\int_0^1 g(x) \, dx = (1 - 0)g(c) = g(c). \quad (1)$$

Compte tenu que $\int_0^1 f(x) \, dx = 1/2$ est égal à $\int_0^1 x \, dx = 1/2$, l'intégrale de g est nulle et l'égalité (1) est équivalente à $g(c) = 0$ c'est à dire $f(c) = c$.

2. Soient $I = [0, 1]$ et δ un nombre réel > 0 . On note aussi δ la jauge constante (égale au réel δ partout) sur $[0, 1]$.

(a) Montrer qu'une subdivision $\delta/2$ -fine est aussi δ -fine.

Réponse : Si chaque I_k est inclus dans l'intervalle $\left[t_k - \frac{\delta/2}{2}, t_k + \frac{\delta/2}{2}\right]$, il est inclus dans l'intervalle plus grand $\left[t_k - \frac{\delta}{2}, t_k + \frac{\delta}{2}\right]$.

(b) Montrer que si $\{I_1, \dots, I_n\}$ est une subdivision de I en intervalles de longueur plus petite que $\delta/2$, alors pour tout choix de points de marquage $t_k \in I_k$, la subdivision pointée $\{(I_1, t_1), \dots, (I_n, t_n)\}$ est δ -fine.

Réponse : La longueur de l'intervalle $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ est plus petite que $\delta/2$ c'est à dire $x_k - x_{k-1} \leq \frac{\delta}{2}$. On en déduit que $[x_{k-1}, x_k]$ est inclus dans $\left[t_k - \frac{\delta}{2}, t_k + \frac{\delta}{2}\right]$ parce que

$$t_k - \frac{\delta}{2} \leq x_k - \frac{\delta}{2} \leq x_{k-1} \quad \text{et} \quad t_k + \frac{\delta}{2} \geq x_{k-1} + \frac{\delta}{2} \geq x_k.$$

(c) On rappelle qu'une fonction est dite Riemann-intégrable si, dans la définition d'intégrabilité, on peut se limiter aux jauges constantes. Soit χ la fonction indicatrice des nombres rationnels sur $[0, 1]$; montrer (par l'absurde) que χ n'est pas Riemann-intégrable sur $[0, 1]$.

Réponse : Si on choisit des points t_k rationnels, les $f(t_k)$ valent 1 donc la somme de Riemann $S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n |I_k| f(t_k)$ vaut

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = 1 - 0 = 1,$$

tandis que si on les choisit irrationnels elle vaut 0. Elles ne peuvent donc pas vérifier toutes les deux l'inégalité $|S(f, \mathcal{P}) - S| \leq \frac{1}{3}$ (par exemple).

3. Déterminer une fonction f et un réel a tels que

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t} dt = 2\sqrt{x}$$

pour tout $x > 0$.

Réponse : En dérivant les deux membres de cette égalité on obtient

$$\frac{f(x)}{x} = x^{-\frac{1}{2}}$$

donc $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$.

Puis on fait $x = a$; on obtient

$$\begin{aligned} 6 + \int_a^a \frac{f(t)}{t} dt &= 2\sqrt{a} \Rightarrow 6 = 2\sqrt{a} \\ 3 &= \sqrt{a} \\ a &= 9. \end{aligned}$$

4. Une entreprise souhaite connaître le rythme optimal de remplacement de son matériel informatique, dont la valeur d'achat est V . Cet équipement se déprécie à la vitesse $f(t)$ (où t est le temps, exprimé ici en mois) et occasionne des dépenses d'entretien qui croissent à la vitesse $g(t)$.

(a) Soit

$$C(t) = \frac{1}{t} \int_0^t (f(s) + g(s)) ds.$$

Montrer que les points critiques de C sont ceux pour lesquels $C(t) = f(t) + g(t)$.

Réponse : Comme $tC(t) = \int_0^t (f(s) + g(s)) dx$, il suffit de dériver cette égalité, on obtient

$$C(t) + tC'(t) = f(t) + g(t)$$

et par conséquent l'égalité $C'(t) = 0$ équivaut à $C(t) = f(t) + g(t)$.

(b) On suppose que

$$\begin{cases} f(t) = \frac{V}{15} - \frac{Vt}{450} \text{ pour } 0 < t \leq 30 \\ f(t) = 0 \text{ pour } t > 30 \end{cases}$$

et que

$$g(t) = \frac{Vt^2}{12900} \text{ pour tout } t > 0.$$

Déterminer après combien de temps la dépréciation totale

$$D(t) = \int_0^t f(s) \, ds$$

atteindra la valeur initiale V .

Réponse : Cette intégrale vaut $\frac{Vt}{15} - \frac{Vt^2}{900}$. L'équation $\frac{Vt}{15} - \frac{Vt^2}{900} = V$ équivaut à $(V - 30)^2 = 0$ c'est à dire $V = 30$.

(c) Conclusion.

Réponse : Après deux ans et demi le matériel ne vaut plus rien.