Université de Provence 2010-2011
Licence MI 1ère année-S1

Mathématiques générales I

Partiel 1

8 Octobre 2010

Durée : 2 heures *Ni document ni calculette autorisés*

Exercice 1

Soit G un graphe connexe et simple dont trois sommets au moins sont de degré 1.
1. Supposons que G a quatre sommets. Soit d le degré de son quatrième sommet. Justifier les réponses aux question suivantes :

Peut-on avoir d pair ? Peut-on avoir $d > 3$? Peut-on avoir $d = 1$?

En déduire G.
2. Représenter les différentes possibilités si G a 5 sommets.

Exercice 2

Soit G un graphe simple et connexe sans aucun cycle. Soient u et v deux sommets de G, et uv une arête connectant u à v. Montrer (par l'absurde) que $G - uv$ n'est pas un graphe connexe.

Exercice 3

Soit $E = \{1, 2, 3\}$ un ensemble.
1. Déterminer l'ensemble de ses parties, $\mathcal{P}(E)$.
2. A-t-on $E \in \mathcal{P}(E)$ ou $E \subset \mathcal{P}(E)$? Justifier.
3. A-t-on $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ ou $\emptyset \subset \mathcal{P}(E)$? Justifier.
4. Soit f de E dans $\mathcal{P}(E)$, définie par $f(1) = \{1, 2\}$, $f(2) = \{2\}$ et $f(3) = E$. Déterminer l'image de f.
5. Donner une application injective de E dans $\mathcal{P}(E)$.
6. Donner une application surjective de $\mathcal{P}(E)$ dans E.

Exercice 4

Soient A, B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On note le complémentaire de A dans E par $E - A$ (que l'on peut aussi noter $\bar{A}$). Montrer que $A \subset E - B \Leftrightarrow B \subset E - A$.

Exercice 5

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2 - \sqrt{3}z + 1$. Exprimer les solutions sous forme géométrique.
2. En déduire les solutions de l'équation suivante : $Z^6 - \sqrt{3}Z^3 + 1$.

Exercice 6

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z du plan, tels que $|z+1-2i| = |z+3+2i|$ (Donner l'équation). Préciser s'il s'agit d'un sous-ensemble connu du plan.

Exercice 7

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$.
1. Donner le domaine de définition de f.
2. Donner $f^{-1}(\{1\})$. A-t-on $Im(f) = \mathbb{R}$? En déduire si la fonction f est surjective sur $\mathbb{R}$?
3. Tracer le graphe de f (après avoir dressé son tableau de variation). En déduire si la fonction f est injective.
4. Déterminer $f^{-1}(\{2\})$
5. Soit $y \in \mathbb{R} - \{1\}$. Montrer que y admet un antécédent.
6. Soit $g\ :\ ]3, +\infty[\to Y$ définie par $g(x) = f(x), \forall x \in]3, +\infty[$. Déterminer Y pour que g soit bijective (justifier). Donner sa fonction réciproque.