

Mathématiques générales I

Partiel 1 corrigé

8 OCTOBRE 2010

Durée : 2 heures

Ni document ni calculatrice autorisés

EXERCICE 1

Soit G un graphe connexe et simple dont trois sommets au moins sont de degré 1.

1. Supposons que G a quatre sommets. Soit d le degré de son quatrième sommet. Justifier les réponses aux questions suivantes :

Peut-on avoir d pair ? (sur 0,5 point) Peut-on avoir $d > 3$? (sur 0,5 point) Peut-on avoir $d = 1$? (sur 0,5 point)

En déduire G . (sur 0,5 point)

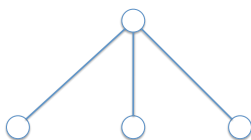
Réponse : d ne peut pas être pair parce que la somme des degrés (qui vaut $1 + 1 + 1 + d$) est obligatoirement paire d'après le cours.

d ne peut pas être 4, un sommet est relié au plus aux trois autres sommets.

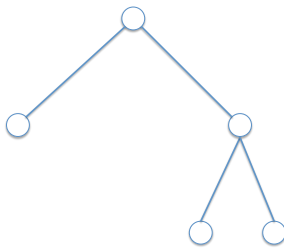
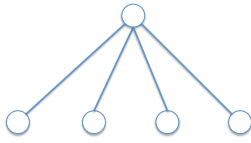
d ne peut pas être 1, la seule possibilité serait alors le graphe non connexe :



Par conséquent, d ne peut être que 3 :



2. Représenter les différentes possibilités si G a 5 sommets. (sur 1 point)
Réponse :

**EXERCICE 2**

Soit G un graphe simple et connexe sans aucun cycle. Soient u et v deux sommets de G , et uv une arête connectant u à v . Montrer (par l'absurde) que $G - uv$ n'est pas un graphe connexe. (sur 2 points)

Réponse : Un graphe sans cycle n'a évidemment pas de face ($F = 0$). La formule $S - A + F = C$ dans le cas d'un graphe simple et connexe sans cycle, devient $S - A + 0 = 1$. Enlevons-lui une arête sans enlever de sommet ; on a alors $A' = A - 1$, $S' = S$ et $F' = 0$, d'où $S' - A' + F' = S - A + 1 = 2$: il y a deux composantes connexes, c'est à dire ce graphe n'est pas connexe.

EXERCICE 3

Soit $E = \{1, 2, 3\}$ un ensemble.

1. Déterminer l'ensemble de ses parties, $\mathcal{P}(E)$. (sur 0,5 point)

Réponse : $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$.

2. A-t-on $E \in \mathcal{P}(E)$ ou $E \subset \mathcal{P}(E)$? Justifier. (sur 0,5 point)

Réponse : On a $E \in \mathcal{P}(E)$ parce que E est un sous-ensemble de E . On n'a pas $E \subset \mathcal{P}(E)$ parce que cette inclusion voudrait dire que les éléments de E appartiennent à $\mathcal{P}(E)$ (ensemble des sous-ensembles de E).

3. A-t-on $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ ou $\emptyset \subset \mathcal{P}(E)$? Justifier. (sur 1 point)

Réponse : L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est sous-ensemble de tous les ensembles. En particulier c'est un sous-ensemble de E , autrement dit $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$. Mais c'est aussi un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$, autrement dit $\emptyset \subset \mathcal{P}(E)$.

4. Soit f de E dans $\mathcal{P}(E)$, définie par $f(1) = \{1, 2\}$, $f(2) = \{2\}$ et $f(3) = E$. Déterminer l'image de f . (sur 0,5 point)

Réponse : $\{\{1, 2\}, \{2\}, E\}$.

5. Donner une application injective de E dans $\mathcal{P}(E)$. (sur 1 point)

Réponse : f , parce que $f(1)$, $f(2)$ et $f(3)$ sont distincts.

6. Donner une application surjective de $\mathcal{P}(E)$ dans E . (sur 1 point)

Réponse : g définie par $g(\emptyset) = 1$, $g(\{1\}) = 2$, $g(\{2\}) = 3$, $g(\{3\}) = 1$, $g(\{1, 2\}) = 2$, $g(\{1, 3\}) = 3$, $g(\{2, 3\}) = 1$, $g(\{1, 2, 3\}) = 2$ est surjective parce que chacun des éléments de $\{1, 2, 3\}$ admet au moins un antécédent.

EXERCICE 4

Soient A, B deux sous-ensembles d'un ensemble E . On note le complémentaire de A dans E par $E - A$ (que l'on peut aussi noter $\bar{A}$). Montrer que $A \subset E - B \Leftrightarrow B \subset E - A$. (sur 2 points)

Réponse : L'inclusion $A \subset E - B$ signifie que les éléments de A appartiennent à $E - B$, autrement dit ils n'appartiennent pas à B . Ça revient à dire que A et B n'ont pas d'élément commun.

L'inclusion $B \subset E - A$ signifie que B et A n'ont pas d'élément commun, les deux inclusions signifient donc la même chose.

EXERCICE 5

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2 - \sqrt{3}z + 1$. Exprimer les solutions sous forme géométrique. (sur 1 point)

Réponse : $z = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}$. C'est aussi $e^{\pm i \frac{\pi}{6}}$.

2. En déduire les solutions de l'équation suivante : $Z^6 - \sqrt{3}Z^3 + 1$. (sur 2 points)

Réponse : $Z^3 = e^{\pm i \frac{\pi}{6}}$. En polaires, l'équation est $(\rho e^{i\theta})^3 = e^{\pm i \frac{\pi}{6}}$, où il faut calculer $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Cette équation équivaut à $\rho^3 = 1$ et $3\theta = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ avec k entier ; ce qui fait $\rho = 1$ et $\theta = \pm \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$. En donnant différentes valeurs à k on obtient :

$$Z_1 = e^{i \frac{\pi}{18}}, Z_2 = e^{i \frac{13\pi}{18}}, Z_3 = e^{i \frac{25\pi}{18}}, Z_4 = e^{-i \frac{\pi}{18}}, Z_5 = e^{-i \frac{13\pi}{18}}, Z_6 = e^{-i \frac{25\pi}{18}}.$$

EXERCICE 6

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z du plan, tels que $|z + 1 - 2i| = |z + 3 + 2i|$ (Donner l'équation). (sur 1,5 point) Préciser s'il s'agit d'un sous-ensemble connu du plan. (sur 0,5 point)

Réponse : C'est la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x - 1$. C'est la médiatrice du segment reliant les points d'affixes $-1 + 2i$ et $-3 - 2i$.

EXERCICE 7

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$.

1. Donner le domaine de définition de f . (sur 0,5 point)

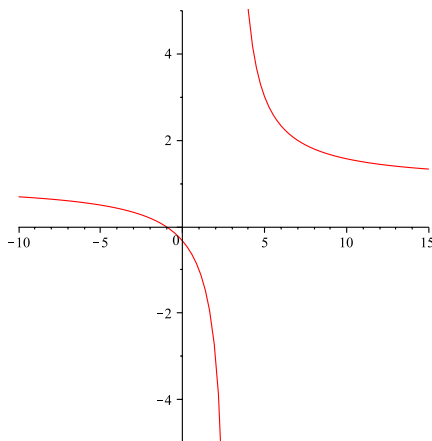
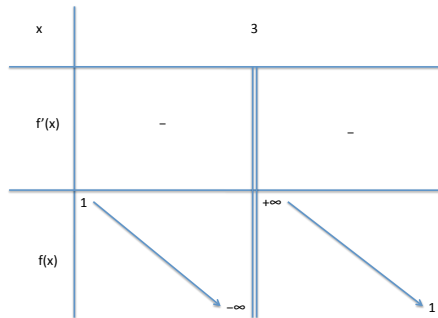
Réponse : $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

2. Donner $f^{-1}(\{1\})$. (sur 0,5 point) A-t-on $Im(f) = \mathbb{R}$? (sur 1 point) En déduire si la fonction f est surjective sur $\mathbb{R}$? (sur 0,5 point)

Réponse : $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$ donc -1 n'appartient pas à $Im(f)$. $Im(f)$ est différent de $\mathbb{R}$ et f n'est pas surjective.

3. Tracer le graphe de f (après avoir dressé son tableau de variation). (sur 0,5 point) En déduire si la fonction f est injective. (sur 0,5 point)

Réponse : La dérivée $f'(x) = -\frac{4}{(x-3)^2}$ est strictement négative. Les limites de f en $\pm\infty$ valent 1 et ses limites en ± 3 valent $\pm\infty$.



f est injective parce qu'étant donné deux réels $x_1 < x_2$ dans la réunion des intervalles $] - \infty, 3[$ et $]3, +\infty[$, si x_1 et x_2 sont dans le même intervalle on a $f(x_1) > f(x_2)$ d'après le tableau de variations, et s'ils sont dans des intervalles différents on a $f(x_1) < 1 < f(x_2)$ toujours d'après le tableau de variations, et donc dans les deux cas $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont différents.

4. Déterminer $f^{-1}(\{2\})$. (sur 0,5 point)

Réponse : $\{7\}$.

5. Soit $y \in \mathbb{R} - \{1\}$. Montrer que y admet un antécédent. (sur 1 point)

Réponse : On calcule l'antécédent de y , c'est $\frac{3y+1}{y-1}$.

6. Soit $g :]3, +\infty[\rightarrow Y$ définie par $g(x) = f(x), \forall x \in]3, +\infty[$. Déterminer Y pour que g soit bijective (justifier). (sur 1 point) Donner sa fonction réciproque. (sur 0,5 point)

Réponse : $Y = g(]3, +\infty[) =]1, +\infty[$ (d'après le tableau de variations). g est injective parce qu'elle est croissante sur son intervalle de définition ; g est surjective parce que l'image de son intervalle de définition est égal à son ensemble d'arrivée (c'est à dire $g(]3, +\infty[) =]1, +\infty[$).

$$g^{-1}(y) = \frac{3y+1}{y-1}.$$