Corrigé de l'exercice 4 - Intégration 1 - 1$^{\text{ère}}$ session - 10 mai 2005

$$I_n = \int_{-1}^{1} \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\ \mathrm{d}t.$$

(a) Il s'agit de démontrer que pour n fixé, la fonction $f_n(t) = \dfrac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur l'intervalle $]-1,1[$.

Comme f_n n'est pas défini en $t=-1$ ni en $t=1$, on utilise le critère de comparaison (proposition 8.3 du cours) sur l'intervalle $]-1,0]$ puis sur $]0,1]$.

Pour $t \in]-1,0]$ la valeur absolue $|f_n(t)|$ est majorée par $1/\sqrt{1+t}$ parce que $|t^n| \leq 1$ et, compte tenu que $1-t \geq 1$, $1-t^2 = (1+t)(1-t) \geq 1+t$.

On a donc $|f_n(t)| \leq 1/(t-a)^\alpha$ avec $a=-1$ et $\alpha = \dfrac{1}{2}$, et d'après le critère de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\ \mathrm{d}t$ converge.

Pour $t \in [0,1[$ $f_n(t)$ est positif et majoré par $1/\sqrt{1-t}$ parce que $t^n \leq 1$ et, compte tenu que $1+t \geq 1$, $1-t^2 = (1+t)(1-t) \geq 1-t$.

On a donc $|f_n(t)| \leq 1/(b-t)^\alpha$ avec $b=1$ et $\alpha = \dfrac{1}{2}$, et d'après le critère de comparaison l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\ \mathrm{d}t$ converge.

Comme les deux convergent, $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\ \mathrm{d}t$ aussi.

(b) Pour démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$:

On utilise d'abord le théorème de convergence monotone sur l'intervalle $[0,1[$:

α) La fonction (positive) f_n est Lebesgue-intégrable sur cet intervalle, c'est à dire cette fonction et sa valeur absolue (qui lui est égale) sont intégrables (c'est ce qu'on a démontré à la question (a)).

β) La suite $(f_n(t)$ (pour t fixé) est décroissante parce que (compte tenu que $0 \leq t < 1$)

$$f_{n+1}(t) - f_n(t) = \frac{t^{n+1}-t^n}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{t^n(t-1)}{\sqrt{1-t^2}} \leq 0.$$

γ) La suite $(f_n(t)$ converge vers 0 parce que $t^n \to 0$ pour $t \in [0,1[$ fixé et $n \to +\infty$.

δ) La suite des intégrales $\displaystyle\int_0^1 f_n$ est minorée (par 0 puisque les f_n sont positives).

Le théorème de convergence monotone dit alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 f_n\right) = \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)$ ce qui fait (compte tenu de la condition γ) que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 f_n\right) = 0.$

Il reste à démontrer que $\displaystyle\int_{-1}^{0} f_n$ aussi tend vers 0. Faisons le changement de variable $u=-t$:

$$\begin{aligned}\int_{t=-1}^{t=0} \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\ \mathrm{d}t &= \int_{u=1}^{u=0} \frac{(-1)^n u^n}{\sqrt{1-u^2}}\ (-\mathrm{d}u)\\ &= (-1)^n \int_{u=0}^{u=1} \frac{u^n}{\sqrt{1-u^2}}\ \mathrm{d}u\end{aligned}$$

c'est à dire $\displaystyle\int_{-1}^{0} f_n = (-1)^n \int_0^1 f_n$ (où $(-1)^n$ vaut -1 si n est impair et 1 si n est pair).

$$I_n = \int_{-1}^{0} f_n + \int_0^1 f_n = (-1)^n \int_0^1 f_n + \int_0^1 f_n \to 0.$$