Université d'Aix-Marseille
Semestre 1

Licence de Mathématiques
2012-2013

MATHEMATIQUES 01

Examen deuxième session – Juin 2013

Calculette et documents non autorisés

Durée : 2 heures

EXERCICE 1

On considère les parties de $\mathbb{R}$ suivantes

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{x \in \mathbb{R} \ / \ 3x+1 \leqslant -2\} \\ B & = & \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 - 3x + 1 \geqslant 2\} \\ C & = & \{x \in \mathbb{R} \ / \sqrt{x+1} < 1\}. \end{array}$$

1. Déterminer ces parties et préciser lesquelles sont des intervalles.
2. L'union de A, B et C est-elle égale à $\mathbb{R}$?

EXERCICE 2

Soit la fonction f définie par

$$\begin{array}{rccc} f: &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{2\tan(x)+1}{\tan(x)-1} \end{array}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de ses intervalles de définition.
3. Calculer la dérivée de f.
4. Etablir le tableau des variations de f.
5. Déterminer l'ensemble $f(]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[)$.
6. Déterminer l'ensemble $f(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[)$. On notera J cet ensemble.
7. Démontrer que $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[\to J$ est bijective.

EXERCICE 3

Calculs de primitives

1. Soit l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \, dx.$$

   (a) Justifier l'existence de I.

   (b) Calculer I en faisant le changement de variables $x = 2t$.

2. Pour les fonctions suivantes, on déterminera leur ensemble de définition puis on les calculera

$$\begin{array}{rcl} f_1(x) & = & \displaystyle\int x \exp(x^2) \, dx \\ f_2(x) & = & \displaystyle\int (x+1)\cos(2x) \, dx. \end{array}$$

Exercice 4

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère la suite définie par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante.
2. Majoration de la suite
   (a) Démontrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a
   $$\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est majorée.
3. Déduire des questions précédentes le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$.