ALGÈBRE

- I -

On considère la forme quadratique sur $\mathbf{R}^3$, définie par

$$q(x_1, x_2, x_3) = -3x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + x_3^2.$$

1) Donner une décomposition de Gauss de q sous la forme

$$q(x_1, x_2, x_3) = a_1\ell_1(x_1, x_2, x_3)^2 + a_2\ell_2(x_1, x_2, x_3)^2 + a_3\ell_3(x_1, x_2, x_3)^2$$

où ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 sont des formes linéaires indépendantes. En déduire le rang, la signature et le noyau de q.

2) Déterminer la base $\{f_1, f_2, f_3\}$ de $\mathbf{R}^3$ dont $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ est la base duale.

3) a) Déterminer la forme bilinéaire symétrique f telle que $q(x) = f(x, x)$.

b) Déterminer la matrice A de f dans la base canonique, puis sa matrice dans la base $\{f_1, f_2, f_3\}$.

4) a) Déterminer une base $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbf{R}^3$ telle que v_1, v_2, v_3 soient vecteurs propres de la matrice A. La base $\mathcal{V}$ est-elle ortogonale pour la forme bilinéaire f, ou pour le produit scalaire usuel (défini par $(x|y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$) ?

b) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{V}$.

- II -

On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^3$ défini par

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3;\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}.$$

1) a) Trouver une base $\{e_1, e_2\}$ de F.

b) Soit $u = (1, 1, 1)$. Vérifier que $\{e_1, e_2, u\}$ est une base de $\mathbf{R}^3$, et appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à cette base.

2) Soit $p : \mathbf{R}^3 \to F$ la projection sur F et $s : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la symétrie par rapport à F.

a) Déterminer $p(x_1, x_2, x_3)$ et $s(x_1, x_2, x_3)$ pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$.

b) Déterminer la distance de (x_1, x_2, x_3) à F.