

Intégration 1

Fonctions intégrables

Jean-Yves Briend

Université Aix-Marseille 1

Subdivisions, jauges, finesse

Quelques rappels essentiels :

Subdivisions, jauges, finesse

- $I = [a, b]$, $a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$, $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $t_k \in I_k$.

Subdivisions, jauges, finesse

- $I = [a, b]$, $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$, $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $t_k \in I_k$.
- Subdivision pointée : $\mathcal{P} = \{(I_1, t_1), \dots, (I_n, t_n)\}$.

Subdivisions, jauges, finesse

- $I = [a, b]$, $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$, $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $t_k \in I_k$.
- Subdivision pointée : $\mathcal{P} = \{(I_1, t_1), \dots, (I_n, t_n)\}$.
- Jauge : δ définie sur $[a, b]$, telle que $\delta(x) > 0$, $\forall x \in I$.

Subdivisions, jauges, finesse

- $I = [a, b]$, $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$, $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $t_k \in I_k$.
- Subdivision pointée : $\mathcal{P} = \{(I_1, t_1), \dots, (I_n, t_n)\}$.
- Jauge : δ définie sur $[a, b]$, telle que $\delta(x) > 0$, $\forall x \in I$.
- $\mathcal{P}$ est δ -fine si :

$$\forall 1 \leq k \leq n, t_k - \delta(t_k)/2 \leq x_{k-1} \leq t_k \leq x_k \leq t_k + \delta(t_k)/2.$$

Subdivisions, jauges, finesse

- $I = [a, b]$, $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$, $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $t_k \in I_k$.
- Subdivision pointée : $\mathcal{P} = \{(I_1, t_1), \dots, (I_n, t_n)\}$.
- Jauge : δ définie sur $[a, b]$, telle que $\delta(x) > 0$, $\forall x \in I$.
- $\mathcal{P}$ est δ -fine si :

$$\forall 1 \leq k \leq n, t_k - \delta(t_k)/2 \leq x_{k-1} \leq t_k \leq x_k \leq t_k + \delta(t_k)/2.$$

- Somme de Riemann de f associée à δ :

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n |I_k| f(t_k).$$

Fonction intégrable, intégrale

En raffinant les partitions, on veut que les sommes de Riemann convergent vers une limite.

Fonction intégrable, intégrale

Définition 0.1. — Soit f une fonction numérique définie sur $I = [a, b]$. On dit que f est intégrable s'il existe un nombre réel S qui vérifie : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une jauge δ sur I telle que, pour toute subdivision δ -fine $\mathcal{P}$, on a

$$|S(f, \mathcal{P}) - S| \leq \varepsilon.$$

Fonction intégrable, intégrale

Définition 0.1. — Soit f une fonction numérique définie sur $I = [a, b]$. On dit que f est intégrable s'il existe un nombre réel S qui vérifie : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une jauge δ sur I telle que, pour toute subdivision δ -fine $\mathcal{P}$, on a

$$|S(f, \mathcal{P}) - S| \leq \varepsilon.$$

- Le nombre S est appelé l'intégrale de f entre a et b et noté indifféremment :

$$\int_{[a,b]} f(x) \, dx \text{ ou } \int_a^b f(x) \, dx \dots$$

Fonction intégrable, intégrale

Définition 0.1. — Soit f une fonction numérique définie sur $I = [a, b]$. On dit que f est intégrable s'il existe un nombre réel S qui vérifie : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une jauge δ sur I telle que, pour toute subdivision δ -fine $\mathcal{P}$, on a

$$|S(f, \mathcal{P}) - S| \leq \varepsilon.$$

- Le nombre S est appelé l'intégrale de f entre a et b et noté indifféremment :

$$\int_{[a,b]} f(x) \, dx \text{ ou } \int_a^b f(x) \, dx \dots$$

- On note $\mathcal{I}([a, b])$ l'espace des fonctions intégrables sur $[a, b]$.

Deux questions essentielles

S'il existe une jauge sans subdivision δ -fine, toute fonction est intégrable !

Deux questions essentielles

- δ une jauge sur I : existe-t-il une subdivision δ -fine ?

Deux questions essentielles

- δ une jauge sur I : existe-t-il une subdivision δ -fine ?

On a appelé S **L**'intégrale de f : f n'aurait-elle pas d'autres intégrales ?

Deux questions essentielles

- δ une jauge sur I : existe-t-il une subdivision δ -fine ?
- Si f est intégrable, son intégrale S est-elle unique ?

Le lemme de Cousin

Réponse à la première question :

Le lemme de Cousin

Lemme 0.1. — *Soient $I = [a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et δ une jauge sur I . Alors il existe une subdivision δ -fine.*

Le lemme de Cousin

Lemme 0.1. — Soient $I = [a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et δ une jauge sur I . Alors il existe une subdivision δ -fine.

- DÉMONSTRATION : Par l'absurde : δ une jauge sans subdivision δ -fine.

Le lemme de Cousin

Lemme 0.1. — Soient $I = [a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et δ une jauge sur I . Alors il existe une subdivision δ -fine.

- DÉMONSTRATION : Par l'absurde : δ une jauge sans subdivision δ -fine.
- Coupons $I = [a, (a + b)/2] \cup [(a + b)/2, b]$.

Le lemme de Cousin

Lemme 0.1. — *Soient $I = [a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et δ une jauge sur I . Alors il existe une subdivision δ -fine.*

- DÉMONSTRATION : Par l'absurde : δ une jauge sans subdivision δ -fine.
- Coupons $I = [a, (a + b)/2] \cup [(a + b)/2, b]$.
- L'un des deux intervalles, noté I_1 , n'admet pas de subdivision δ -fine.

Le lemme de Cousin

Lemme 0.1. — *Soient $I = [a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et δ une jauge sur I . Alors il existe une subdivision δ -fine.*

- DÉMONSTRATION : Par l'absurde : δ une jauge sans subdivision δ -fine.
- Coupons $I = [a, (a + b)/2] \cup [(a + b)/2, b]$.
- L'un des deux intervalles, noté I_1 , n'admet pas de subdivision δ -fine.
- Coupons I_1 en deux. L'un des deux intervalles, noté I_2 , est sans subdivision δ -fine.

Fin de la preuve

- (I_n) une suite d'intervalles emboîtés,

Fin de la preuve

- (I_n) une suite d'intervalles emboîtés, chacun sans subdivision δ -fine.

Fin de la preuve

- (I_n) une suite d'intervalles emboîtés, chacun sans subdivision δ -fine.
- Soit ξ l'unique point qui est dans tous les I_k .

Fin de la preuve

- (I_n) une suite d'intervalles emboîtés, chacun sans subdivision δ -fine.
- Soit ξ l'unique point qui est dans tous les I_k .
- Bien-sûr, $\delta(\xi) > 0$,

Fin de la preuve

- (I_n) une suite d'intervalles emboîtés, chacun sans subdivision δ -fine.
- Soit ξ l'unique point qui est dans tous les I_k .
- Bien-sûr, $\delta(\xi) > 0$,
il existe n tel que $|I_n| = (b - a)2^{-n} \leq \delta(\xi)/2$ (Archimède),

Fin de la preuve

- (I_n) une suite d'intervalles emboîtés, chacun sans subdivision δ -fine.
- Soit ξ l'unique point qui est dans tous les I_k .
- Bien-sûr, $\delta(\xi) > 0$,
il existe n tel que $|I_n| = (b - a)2^{-n} \leq \delta(\xi)/2$ (Archimède),
donc $I_n \subset [\xi - \delta(\xi)/2, \xi + \delta(\xi)/2]$:

Fin de la preuve

- (I_n) une suite d'intervalles emboîtés, chacun sans subdivision δ -fine.
- Soit ξ l'unique point qui est dans tous les I_k .
- Bien-sûr, $\delta(\xi) > 0$,
il existe n tel que $|I_n| = (b - a)2^{-n} \leq \delta(\xi)/2$ (Archimède),
donc $I_n \subset [\xi - \delta(\xi)/2, \xi + \delta(\xi)/2]$:
- $\mathcal{P} = \{(I_n, \xi)\}$ est une subdivision δ -fine de I_n .

Fin de la preuve

- (I_n) une suite d'intervalles emboîtés, chacun sans subdivision δ -fine.
- Soit ξ l'unique point qui est dans tous les I_k .
- Bien-sûr, $\delta(\xi) > 0$,
il existe n tel que $|I_n| = (b - a)2^{-n} \leq \delta(\xi)/2$ (Archimède),
donc $I_n \subset [\xi - \delta(\xi)/2, \xi + \delta(\xi)/2]$:
- $\mathcal{P} = \{(I_n, \xi)\}$ est une subdivision δ -fine de I_n .
- une contradiction.

Unicité de l'intégrale

Répondons à la deuxième question.

Unicité de l'intégrale

Proposition 0.1. — *Si f est intégrable sur $[a, b]$, son intégrale (le nombre S donné par la définition) est unique.*

Unicité de l'intégrale

Proposition 0.1. — *Si f est intégrable sur $[a, b]$, son intégrale (le nombre S donné par la définition) est unique.*

- DÉMONSTRATION. S, S' comme dans la définition.

Unicité de l'intégrale

Proposition 0.1. — *Si f est intégrable sur $[a, b]$, son intégrale (le nombre S donné par la définition) est unique.*

- DÉMONSTRATION. S, S' comme dans la définition.
- $\varepsilon > 0$ fixé quelconque.

Unicité de l'intégrale

Proposition 0.1. — *Si f est intégrable sur $[a, b]$, son intégrale (le nombre S donné par la définition) est unique.*

- DÉMONSTRATION. S, S' comme dans la définition.
- $\varepsilon > 0$ fixé quelconque.
- δ donné par la définition, $\mathcal{P}$ δ -fine.

Unicité de l'intégrale

Proposition 0.1. — *Si f est intégrable sur $[a, b]$, son intégrale (le nombre S donné par la définition) est unique.*

- DÉMONSTRATION. S, S' comme dans la définition.
- $\varepsilon > 0$ fixé quelconque.
- δ donné par la définition, $\mathcal{P}$ δ -fine.
- $|S(f, \mathcal{P}) - S| \leq \varepsilon,$

Unicité de l'intégrale

Proposition 0.1. — *Si f est intégrable sur $[a, b]$, son intégrale (le nombre S donné par la définition) est unique.*

- DÉMONSTRATION. S, S' comme dans la définition.
- $\varepsilon > 0$ fixé quelconque.
- δ donné par la définition, $\mathcal{P}$ δ -fine.
- $|S(f, \mathcal{P}) - S| \leq \varepsilon, \quad |S(f, \mathcal{P}) - S'| \leq \varepsilon.$

Unicité de l'intégrale

Proposition 0.1. — *Si f est intégrable sur $[a, b]$, son intégrale (le nombre S donné par la définition) est unique.*

- DÉMONSTRATION. S, S' comme dans la définition.
- $\varepsilon > 0$ fixé quelconque.
- δ donné par la définition, $\mathcal{P}$ δ -fine.
- $|S(f, \mathcal{P}) - S| \leq \varepsilon, \quad |S(f, \mathcal{P}) - S'| \leq \varepsilon.$
- Donc $|S - S'| \leq 2\varepsilon :$

Unicité de l'intégrale

Proposition 0.1. — *Si f est intégrable sur $[a, b]$, son intégrale (le nombre S donné par la définition) est unique.*

- DÉMONSTRATION. S, S' comme dans la définition.
- $\varepsilon > 0$ fixé quelconque.
- δ donné par la définition, $\mathcal{P}$ δ -fine.
- $|S(f, \mathcal{P}) - S| \leq \varepsilon, \quad |S(f, \mathcal{P}) - S'| \leq \varepsilon.$
- Donc $|S - S'| \leq 2\varepsilon :$
- ε arbitraire, donc $S = S'$.

Unicité de l'intégrale

Proposition 0.1. — *Si f est intégrable sur $[a, b]$, son intégrale (le nombre S donné par la définition) est unique.*

- DÉMONSTRATION. S, S' comme dans la définition.
- $\varepsilon > 0$ fixé quelconque.
- δ donné par la définition, $\mathcal{P}$ δ -fine.
- $|S(f, \mathcal{P}) - S| \leq \varepsilon, \quad |S(f, \mathcal{P}) - S'| \leq \varepsilon.$
- Donc $|S - S'| \leq 2\varepsilon :$
- ε arbitraire, donc $S = S'$.

J'ai triché (un peu) quelque part : trouverez-vous où ?

Manipulations 1 : minima

Avant les exemples, quelques manipulations élémentaires.

Manipulations 1 : minima

- $\delta_1, \dots, \delta_p$ des jauges sur I .

Manipulations 1 : minima

- $\delta_1, \dots, \delta_p$ des jauges sur I .
- $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_p\}$ est une jauge.

Manipulations 1 : minima

- $\delta_1, \dots, \delta_p$ des jauges sur I .
- $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_p\}$ est une jauge.
- Si $\mathcal{P}$ est δ -fine, alors elle est δ_i -fine pour tout $1 \leq i \leq p$.

Manipulations 2 : coupage-collage

- δ une jauge sur $I = [a, b]$.

Manipulations 2 : coupage-collage

- δ une jauge sur $I = [a, b]$.
- $\mathcal{P} = \{([x_0, x_1], t_1), \dots, ([x_{n-1}, x_n], t_n)\}$ une subdivision δ -fine.

Manipulations 2 : coupage-collage

- δ une jauge sur $I = [a, b]$.
- $\mathcal{P} = \{([x_0, x_1], t_1), \dots, ([x_{n-1}, x_n], t_n)\}$ une subdivision δ -fine.
- On peut «couper» les intervalles I_k aux points de marquage :

$$I_k = [x_{k-1}, t_k] \cup [t_k, x_k].$$

Manipulations 2 : coupage-collage

- δ une jauge sur $I = [a, b]$.
- $\mathcal{P} = \{([x_0, x_1], t_1), \dots, ([x_{n-1}, x_n], t_n)\}$ une subdivision δ -fine.
- On peut «couper» les intervalles I_k aux points de marquage :

$$I_k = [x_{k-1}, t_k] \cup [t_k, x_k].$$

- On les «recolle», on obtient une subdivision $\mathcal{P}^*$:

$$\mathcal{P}^* = \{([x_0, t_1], t_1), ([t_1, x_1], t_1), ([x_1, t_2], t_2), \dots\}.$$

Manipulations 2 : coupage-collage

- δ une jauge sur $I = [a, b]$.
- $\mathcal{P} = \{([x_0, x_1], t_1), \dots, ([x_{n-1}, x_n], t_n)\}$ une subdivision δ -fine.
- On peut «couper» les intervalles I_k aux points de marquage :

$$I_k = [x_{k-1}, t_k] \cup [t_k, x_k].$$

- On les «recolle», on obtient une subdivision $\mathcal{P}^*$:

$$\mathcal{P}^* = \{([x_0, t_1], t_1), ([t_1, x_1], t_1), ([x_1, t_2], t_2), \dots\}.$$

- $\mathcal{P}^*$ est aussi δ -fine.

Manipulations 2 : coupage-collage

- δ une jauge sur $I = [a, b]$.
- $\mathcal{P} = \{([x_0, x_1], t_1), \dots, ([x_{n-1}, x_n], t_n)\}$ une subdivision δ -fine.
- On peut «couper» les intervalles I_k aux points de marquage :

$$I_k = [x_{k-1}, t_k] \cup [t_k, x_k].$$

- On les «recolle», on obtient une subdivision $\mathcal{P}^*$:

$$\mathcal{P}^* = \{([x_0, t_1], t_1), ([t_1, x_1], t_1), ([x_1, t_2], t_2), \dots\}.$$

- $\mathcal{P}^*$ est aussi δ -fine.
- Mêmes sommes de Riemann : $S(f, \mathcal{P}) = S(f, \mathcal{P}^*)$.

Manipulations 3 : forçage

- $c \in]a, b[.$

Manipulations 3 : forçage

- $c \in]a, b[.$
- Soit $\delta_c : [a, b] \longrightarrow]0, +\infty[:$

$$\begin{cases} \delta_c(c) = 1/4 \\ \delta_c(t) = |t - c|/2 \text{ si } t \neq c. \end{cases}$$

Manipulations 3 : forçage

- $c \in]a, b[$.
- Soit $\delta_c : [a, b] \longrightarrow]0, +\infty[$:

$$\begin{cases} \delta_c(c) = 1/4 \\ \delta_c(t) = |t - c|/2 \text{ si } t \neq c. \end{cases}$$

- $\mathcal{P}$ une subdivision δ_c -fine.

Manipulations 3 : forçage

- $c \in]a, b[$.
- Soit $\delta_c : [a, b] \longrightarrow]0, +\infty[$:

$$\begin{cases} \delta_c(c) = 1/4 \\ \delta_c(t) = |t - c|/2 \text{ si } t \neq c. \end{cases}$$

- $\mathcal{P}$ une subdivision δ_c -fine.
- $c \in I_k$ donc $0 \leq |t_k - c| \leq \delta_c(t_k)$.

Manipulations 3 : forçage

- $c \in]a, b[$.
- Soit $\delta_c : [a, b] \longrightarrow]0, +\infty[$:

$$\begin{cases} \delta_c(c) = 1/4 \\ \delta_c(t) = |t - c|/2 \text{ si } t \neq c. \end{cases}$$

- $\mathcal{P}$ une subdivision δ_c -fine.
- $c \in I_k$ donc $0 \leq |t_k - c| \leq \delta_c(t_k)$.
- Si $t_k \neq c$, alors $|t_k - c| = 2\delta_c(t_k)$, contradiction.

Manipulations 3 : forçage

- $c \in]a, b[$.
- Soit $\delta_c : [a, b] \longrightarrow]0, +\infty[$:

$$\begin{cases} \delta_c(c) = 1/4 \\ \delta_c(t) = |t - c|/2 \text{ si } t \neq c. \end{cases}$$

- $\mathcal{P}$ une subdivision δ_c -fine.
- $c \in I_k$ donc $0 \leq |t_k - c| \leq \delta_c(t_k)$.
- Si $t_k \neq c$, alors $|t_k - c| = 2\delta_c(t_k)$, contradiction.
- On peut donc forcer c à être un point de marquage de $\mathcal{P}$.

Exemples 1 : constantes

- Fonction constante : $f(x) = C$ pour tout x .

Exemples 1 : constantes

- Fonction constante : $f(x) = C$ pour tout x .
 $S(f, \mathcal{P}) = (b - a)C$ pour toute subdivision $\mathcal{P}$.

Exemples 1 : constantes

- Fonction constante : $f(x) = C$ pour tout x .
 $S(f, \mathcal{P}) = (b - a)C$ pour toute subdivision $\mathcal{P}$.
- une fonction constante est intégrable, et

$$\int_a^b C \, dx = (b - a)C.$$

Exemples 1 : constantes

- Fonction constante : $f(x) = C$ pour tout x .
 $S(f, \mathcal{P}) = (b - a)C$ pour toute subdivision $\mathcal{P}$.
- une fonction constante est intégrable, et

$$\int_a^b C \, dx = (b - a)C.$$

- Coïncide avec l'aire du rectangle.

Exemples 2 : monômes

- Soit $f(x) = x^d$ le monôme de degré d .

Exemples 2 : monômes

- Soit $f(x) = x^d$ le monôme de degré d .
- Brique élémentaire pour la construction de nombreuses fonctions :

$$\exp(x) = \sum_{d=0}^{+\infty} \frac{x^d}{d!}.$$

Exemples 2 : monômes

- Soit $f(x) = x^d$ le monôme de degré d .
- $F(x) = x^{d+1}/(d+1)$ est une primitive de f .

Exemples 2 : monômes

- Soit $f(x) = x^d$ le monôme de degré d .
- $F(x) = x^{d+1}/(d+1)$ est une primitive de f .
- $\mathcal{P} = \{([x_{k-1}, x_k], t_k), 1 \leq k \leq n\}$ une subdivision pointée.

Exemples 2 : monômes

- Soit $f(x) = x^d$ le monôme de degré d .
- $F(x) = x^{d+1}/(d+1)$ est une primitive de f .
- $\mathcal{P} = \{([x_{k-1}, x_k], t_k), 1 \leq k \leq n\}$ une subdivision pointée.
- Formule des accroissements finis :

$$\frac{1}{d+1}(x_k^{d+1} - x_{k-1}^{d+1}) = c_k^d(x_k - x_{k-1}).$$

Monômes, suite

- Somme «téléscopique» :

$$\sum_{k=1}^n c_k^d (x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{d+1} (b^{d+1} - a^{d+1}),$$

Monômes, suite

- Somme «téléscopique» :

$$\sum_{k=1}^n c_k^d (x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{d+1} (b^{d+1} - a^{d+1}),$$

soit exactement la valeur souhaitée pour l'intégrale !

Monômes, suite

- Somme «téléscopique» :

$$\sum_{k=1}^n c_k^d (x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{d+1} (b^{d+1} - a^{d+1}),$$

Différence avec la somme de Riemann :

$$\frac{1}{d+1} (b^{d+1} - a^{d+1}) - S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n (c_k^d - t_k^d) (x_k - x_{k-1}).$$

Monômes, suite

- Somme «téléscopique» :

$$\sum_{k=1}^n c_k^d (x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{d+1} (b^{d+1} - a^{d+1}),$$

Différence avec la somme de Riemann :

$$\frac{1}{d+1} (b^{d+1} - a^{d+1}) - S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n (c_k^d - t_k^d) (x_k - x_{k-1}).$$

On veut rendre $c_k^d - t_k^d$ plus petit que $\varepsilon > 0$.

Monômes, suite

- Somme «téléscopique» :

$$\sum_{k=1}^n c_k^d (x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{d+1} (b^{d+1} - a^{d+1}),$$

Différence avec la somme de Riemann :

$$\frac{1}{d+1} (b^{d+1} - a^{d+1}) - S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n (c_k^d - t_k^d) (x_k - x_{k-1}).$$

- Uniforme continuité de f sur $[a, b]$: $\delta > 0$ tel que

$$\forall c, t \in [a, b], (|c - t| \leq \delta) \implies (|c^d - t^d| \leq \varepsilon).$$

Monômes, suite

- Somme «téléscopique» :

$$\sum_{k=1}^n c_k^d (x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{d+1} (b^{d+1} - a^{d+1}),$$

Différence avec la somme de Riemann :

$$\frac{1}{d+1} (b^{d+1} - a^{d+1}) - S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n (c_k^d - t_k^d) (x_k - x_{k-1}).$$

- Uniforme continuité de f sur $[a, b]$: $\delta > 0$ tel que

$$\forall c, t \in [a, b], (|c - t| \leq \delta) \implies (|c^d - t^d| \leq \varepsilon).$$

Exercice : trouver explicitement δ en fonction de ε, a, b .

Monômes : fin

- δ la jauge constante égale au δ trouvé ci-dessus sur $[a, b]$.

Monômes : fin

- δ la jauge constante égale au δ trouvé ci-dessus sur $[a, b]$.
- $\mathcal{P}$ une subdivision δ -fine.

Monômes : fin

- δ la jauge constante égale au δ trouvé ci-dessus sur $[a, b]$.
- $\mathcal{P}$ une subdivision δ -fine.
- Pour tout k , $|c_k - t_k| \leq \delta$, donc :

Monômes : fin

- δ la jauge constante égale au δ trouvé ci-dessus sur $[a, b]$.
- $\mathcal{P}$ une subdivision δ -fine.
- Pour tout k , $|c_k - t_k| \leq \delta$, donc :
- $$\left| \frac{1}{d+1} (b^{d+1} - a^{d+1}) - S(f, \mathcal{P}) \right| \leq \sum_{k=1}^n |c_k^d - t_k^d| (x_k - x_{k-1})$$

Monômes : fin

- δ la jauge constante égale au δ trouvé ci-dessus sur $[a, b]$.
- $\mathcal{P}$ une subdivision δ -fine.
- Pour tout k , $|c_k - t_k| \leq \delta$, donc :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \left| \frac{1}{d+1} (b^{d+1} - a^{d+1}) - S(f, \mathcal{P}) \right| &\leq \sum_{k=1}^n |c_k^d - t_k^d| (x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \sum_{k=1}^n \varepsilon (x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

Monômes : fin

- δ la jauge constante égale au δ trouvé ci-dessus sur $[a, b]$.
- $\mathcal{P}$ une subdivision δ -fine.
- Pour tout k , $|c_k - t_k| \leq \delta$, donc :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \left| \frac{1}{d+1} (b^{d+1} - a^{d+1}) - S(f, \mathcal{P}) \right| &\leq \sum_{k=1}^n |c_k^d - t_k^d| (x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \sum_{k=1}^n \varepsilon (x_k - x_{k-1}) \\ &= \varepsilon (b - a). \end{aligned}$$

Monômes : fin

- δ la jauge constante égale au δ trouvé ci-dessus sur $[a, b]$.
- $\mathcal{P}$ une subdivision δ -fine.
- Pour tout k , $|c_k - t_k| \leq \delta$, donc :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \left| \frac{1}{d+1} (b^{d+1} - a^{d+1}) - S(f, \mathcal{P}) \right| &\leq \sum_{k=1}^n |c_k^d - t_k^d| (x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \sum_{k=1}^n \varepsilon (x_k - x_{k-1}) \\ &= \varepsilon (b - a). \end{aligned}$$

- On a gagné !

Monômes : conclusion

Proposition 0.1. — *Soit $f(x) = x^d$ une fonction monomiale, $d \in \mathbf{N}$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$ et*

$$\int_a^b x^d \, dx = \frac{1}{d+1} (b^{d+1} - a^{d+1}).$$

Fonctions en escalier

- Très importante dans la théorie générale (approximation).

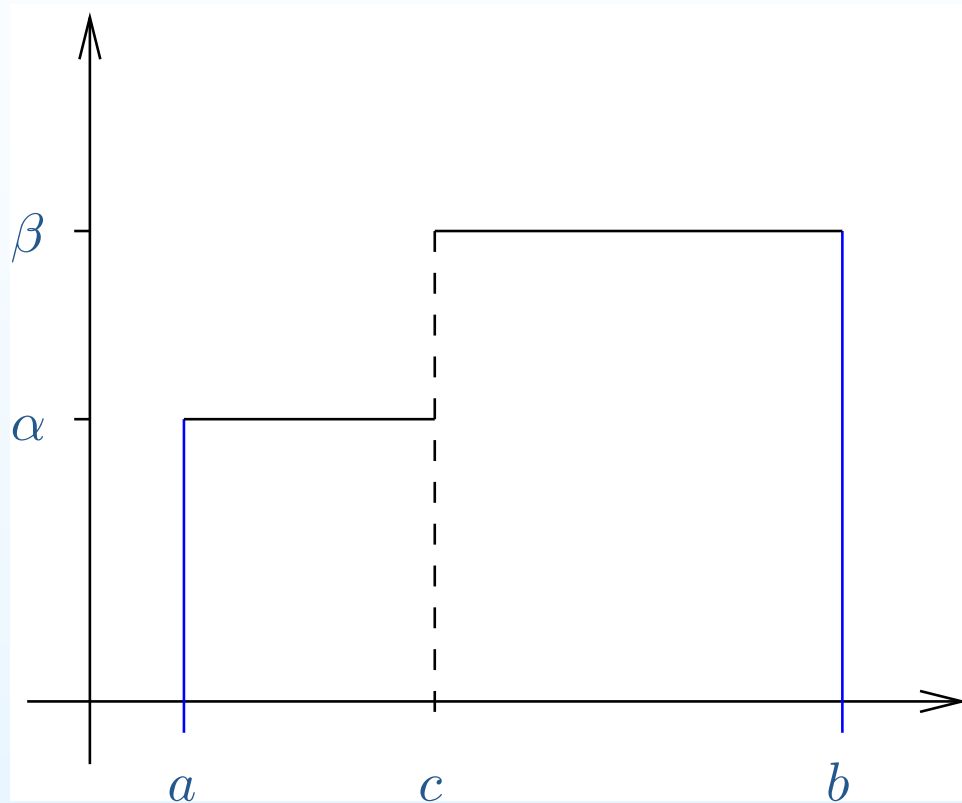
Fonctions en escalier

- Très importante dans la théorie générale (approximation).
- Cas simple : une seule discontinuité, deux valeurs.

Fonctions en escalier

- Très importante dans la théorie générale (approximation).
- Cas simple : une seule discontinuité, deux valeurs.
- $c \in]a, b[, f(x) = \alpha$ sur $[a, c[$ et $f(x) = \beta$ sur $[c, b]$.

Fonction à une marche



Fonction à une marche 2

- Problème : au point c .

Fonction à une marche 2

- Problème : au point c .
- Idée : forcer c à être point de marquage.

Fonction à une marche 2

- Problème : au point c .
 - Idée : forcer c à être point de marquage.
- Fixons $\varepsilon > 0$ et soit δ la jauge définie par :

$$\begin{cases} \delta(x) = \frac{1}{2}|x - c| \text{ si } x \neq c, \\ \delta(c) > 0, \text{ à déterminer.} \end{cases}$$

Fonction à une marche 2

- Problème : au point c .
- Idée : forcer c à être point de marquage.

Fixons $\varepsilon > 0$ et soit δ la jauge définie par :

$$\begin{cases} \delta(x) = \frac{1}{2}|x - c| \text{ si } x \neq c, \\ \delta(c) > 0, \text{ à déterminer.} \end{cases}$$

- Valeur désirée pour l'intégrale : $\alpha(c - a) + \beta(b - c)$.

Fonction à une marche : fin

- $\mathcal{P}$ une subdivision δ -fine : c est point de marquage.

Fonction à une marche : fin

- $\mathcal{P}$ une subdivision δ -fine : c est point de marquage.
- Quitte à «couper-coller», supposons que $\mathcal{P}$ contient $([x_{k-1}, c], c)$ et $([c, x_k], c)$.

Fonction à une marche : fin

- $\mathcal{P}$ une subdivision δ -fine : c est point de marquage.
- Quitte à «couper-coller», supposons que $\mathcal{P}$ contient $([x_{k-1}, c], c)$ et $([c, x_k], c)$.
- Somme de Riemann : $S(f, \mathcal{P}) = \alpha(x_{k-1} - a) + \beta(b - x_{k-1})$.

Fonction à une marche : fin

- $\mathcal{P}$ une subdivision δ -fine : c est point de marquage.
- Quitte à «couper-coller», supposons que $\mathcal{P}$ contient $([x_{k-1}, c], c)$ et $([c, x_k], c)$.
- Somme de Riemann : $S(f, \mathcal{P}) = \alpha(x_{k-1} - a) + \beta(b - x_{k-1})$.
- Prenons $\delta(c) = \varepsilon(\max\{1, |\beta - \alpha|\})^{-1}$, et alors

$$|S(f, \mathcal{P}) - (\alpha(c - a) + \beta(b - c))| \leq \varepsilon.$$

Fonction à une marche : fin

- $\mathcal{P}$ une subdivision δ -fine : c est point de marquage.
- Quitte à «couper-coller», supposons que $\mathcal{P}$ contient $([x_{k-1}, c], c)$ et $([c, x_k], c)$.
- Somme de Riemann : $S(f, \mathcal{P}) = \alpha(x_{k-1} - a) + \beta(b - x_{k-1})$.
- Prenons $\delta(c) = \varepsilon(\max\{1, |\beta - \alpha|\})^{-1}$, et alors

$$|S(f, \mathcal{P}) - (\alpha(c - a) + \beta(b - c))| \leq \varepsilon.$$

- On a gagné !

La fonction de Dirichlet

- Exemple d'origine arithmétique (théorie des nombres).

La fonction de Dirichlet

- Exemple d'origine arithmétique (théorie des nombres).
- Non intégrable dans la théorie de Riemann (fortement discontinue).

La fonction de Dirichlet

- Exemple d'origine arithmétique (théorie des nombres).
- Non intégrable dans la théorie de Riemann (fortement discontinue).
- Définissons χ sur $[0, 1]$ par

$$\begin{cases} \chi(x) = 1 \text{ si } x \in \mathbf{Q} \cap [0, 1], \\ \chi(x) = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

La fonction de Dirichlet

- Exemple d'origine arithmétique (théorie des nombres).
- Non intégrable dans la théorie de Riemann (fortement discontinue).
- Définissons χ sur $[0, 1]$ par

$$\begin{cases} \chi(x) = 1 \text{ si } x \in \mathbf{Q} \cap [0, 1], \\ \chi(x) = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

- Fonction indicatrice.

La fonction de Dirichlet

- Exemple d'origine arithmétique (théorie des nombres).
- Non intégrable dans la théorie de Riemann (fortement discontinue).
- Définissons χ sur $[0, 1]$ par

$$\begin{cases} \chi(x) = 1 \text{ si } x \in \mathbf{Q} \cap [0, 1], \\ \chi(x) = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

- $D = \mathbf{Q} \cap [0, 1]$ est dénombrable :

La fonction de Dirichlet

- Exemple d'origine arithmétique (théorie des nombres).
- Non intégrable dans la théorie de Riemann (fortement discontinue).
- Définissons χ sur $[0, 1]$ par

$$\begin{cases} \chi(x) = 1 \text{ si } x \in \mathbf{Q} \cap [0, 1], \\ \chi(x) = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

- $D = \mathbf{Q} \cap [0, 1]$ est dénombrable :
- on peut l'énumérer : $D = \{r_1, r_2, \dots\}$.

Dirichlet, 2

- $\varepsilon > 0$ fixé. δ la jauge :

$$\begin{cases} \delta(x) = 1 \text{ si } x \notin D, \\ \delta(x) = \varepsilon 2^{-j} \text{ si } x = r_j. \end{cases}$$

Dirichlet, 2

- $\varepsilon > 0$ fixé. δ la jauge :

$$\begin{cases} \delta(x) = 1 \text{ si } x \notin D, \\ \delta(x) = \varepsilon 2^{-j} \text{ si } x = r_j. \end{cases}$$

- $\mathcal{P}$ une subdivision δ -fine.

Dirichlet, 2

- $\varepsilon > 0$ fixé. δ la jauge :

$$\begin{cases} \delta(x) = 1 \text{ si } x \notin D, \\ \delta(x) = \varepsilon 2^{-j} \text{ si } x = r_j. \end{cases}$$

- $\mathcal{P}$ une subdivision δ -fine.
- Si $t_k \notin D$, $|I_k|\chi(t_k) = 0$.

Dirichlet, 2

- $\varepsilon > 0$ fixé. δ la jauge :

$$\begin{cases} \delta(x) = 1 \text{ si } x \notin D, \\ \delta(x) = \varepsilon 2^{-j} \text{ si } x = r_j. \end{cases}$$

- $\mathcal{P}$ une subdivision δ -fine.
- Si $t_k \notin D$, $|I_k|\chi(t_k) = 0$.
- Si $t_k = r_j \in D$, alors $|I_k|\chi(t_k) \leq \varepsilon 2^{-j}$.

Dirichlet, 2

- $\varepsilon > 0$ fixé. δ la jauge :

$$\begin{cases} \delta(x) = 1 \text{ si } x \notin D, \\ \delta(x) = \varepsilon 2^{-j} \text{ si } x = r_j. \end{cases}$$

- $\mathcal{P}$ une subdivision δ -fine.
- Si $t_k \notin D$, $|I_k|\chi(t_k) = 0$.
- Si $t_k = r_j \in D$, alors $|I_k|\chi(t_k) \leq \varepsilon 2^{-j}$.
- Somme de Riemann :

$$0 \leq S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n \chi(t_k) |I_k| \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon 2^{-j} \leq \varepsilon.$$

La fonction de Dirichlet, fin

Conclusion : la fonction de Dirichlet est intégrable, d'intégrale nulle.