Intégration 1

Propriétés élémentaires

Jean-Yves Briend

Université Aix-Marseille 1

Linéarité 1

- f, g deux fonctions sur $\mathrm{I} = [a, b]$,

Linéarité 1

- f, g deux fonctions sur $\mathrm{I} = [a, b]$,
- $\mathcal{P} = \{(\mathrm{I}_1, t_1), \ldots, (\mathrm{I}_n, t_n)\}$ une subdivision pointée de I.

Linéarité 1

- f, g deux fonctions sur $\mathrm{I} = [a, b]$,
- $\mathcal{P} = \{(\mathrm{I}_1, t_1), \ldots, (\mathrm{I}_n, t_n)\}$ une subdivision pointée de I.
- On a alors

$$\mathrm{S}(f + g, \mathcal{P}) = \mathrm{S}(f, \mathcal{P}) + \mathrm{S}(g, \mathcal{P}).$$

Linéarité 1

- f, g deux fonctions sur $\mathrm{I} = [a, b]$,
- $\mathcal{P} = \{(\mathrm{I}_1, t_1), \ldots, (\mathrm{I}_n, t_n)\}$ une subdivision pointée de I.
- On a alors

$$\mathrm{S}(f + g, \mathcal{P}) = \mathrm{S}(f, \mathcal{P}) + \mathrm{S}(g, \mathcal{P}).$$

- Cette égalité «passe à la limite».

Linéarité 2

Théorème 0.1. — *Soient* f, g *deux fonctions intégrables sur* I *et* λ *un nombre réel. Alors* $f+g$ *et* λf *sont intégrables sur* I*, et*

$$\int_{\mathrm{I}} (f+g) = \int_{\mathrm{I}} f + \int_{\mathrm{I}} g, \quad \textit{et} \quad \int_{\mathrm{I}} \lambda f = \lambda \int_{\mathrm{I}} f.$$

Linéarité 2

Théorème 0.1. — *Soient* f, g *deux fonctions intégrables sur* I *et* λ *un nombre réel. Alors* $f+g$ *et* λf *sont intégrables sur* I*, et*

$$\int_{\mathrm{I}} (f+g) = \int_{\mathrm{I}} f + \int_{\mathrm{I}} g, \quad \textit{et} \quad \int_{\mathrm{I}} \lambda f = \lambda \int_{\mathrm{I}} f.$$

- En d'autres termes : l'espace $\mathcal{I}(\mathrm{I})$ des fonctions intégrables sur I est un espace vectoriel,et l'intégrale y définit une forme linéaire.

Linéarité 2

Théorème 0.1. — *Soient f, g deux fonctions intégrables sur I et λ un nombre réel. Alors $f+g$ et λf sont intégrables sur I, et*

$$\int_{\mathrm{I}} (f+g) = \int_{\mathrm{I}} f + \int_{\mathrm{I}} g, \quad \textit{et} \quad \int_{\mathrm{I}} \lambda f = \lambda \int_{\mathrm{I}} f.$$

- En d'autres termes : l'espace $\mathcal{I}(\mathrm{I})$ des fonctions intégrables sur I est un espace vectoriel,et l'intégrale y définit une forme linéaire.
- Démonstration du théorème : $\varepsilon > 0$ fixé.

Linéarité 2

Théorème 0.1. — *Soient f, g deux fonctions intégrables sur I et λ un nombre réel. Alors $f+g$ et λf sont intégrables sur I, et*

$$\int_{\mathrm{I}}(f+g) = \int_{\mathrm{I}} f + \int_{\mathrm{I}} g, \quad \textit{et} \quad \int_{\mathrm{I}} \lambda f = \lambda \int_{\mathrm{I}} f.$$

- En d'autres termes : l'espace $\mathcal{I}(\mathrm{I})$ des fonctions intégrables sur I est un espace vectoriel,et l'intégrale y définit une forme linéaire.
- Démonstration du théorème : $\varepsilon > 0$ fixé. δ_1 et δ_2 deux jauges telles que

$$|\mathrm{S}(f, \mathcal{P}) - \int_{\mathrm{I}} f| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |\mathrm{S}(g, \mathcal{Q}) - \int_{\mathrm{I}} g| < \varepsilon,$$

Linéarité 2

Théorème 0.1. — *Soient* f, g *deux fonctions intégrables sur* I *et* λ *un nombre réel. Alors* $f+g$ *et* λf *sont intégrables sur* I*, et*

$$\int_{\mathrm{I}} (f+g) = \int_{\mathrm{I}} f + \int_{\mathrm{I}} g, \quad \textit{et} \quad \int_{\mathrm{I}} \lambda f = \lambda \int_{\mathrm{I}} f.$$

- En d'autres termes : l'espace $\mathcal{I}(\mathrm{I})$ des fonctions intégrables sur I est un espace vectoriel, et l'intégrale y définit une forme linéaire.
- Démonstration du théorème : $\varepsilon > 0$ fixé. δ_1 et δ_2 deux jauges telles que

$$|\mathrm{S}(f, \mathcal{P}) - \int_{\mathrm{I}} f| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |\mathrm{S}(g, \mathcal{Q}) - \int_{\mathrm{I}} g| < \varepsilon,$$

si $\mathcal{P}$ est δ_1-fine (*resp.* $\mathcal{Q}$ est δ_2-fine).

Linéarité : fin

- Posons $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Linéarité : fin

- Posons $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.
- Si $\mathcal{P}$ est δ-fine, alors

$$|\mathrm{S}(f+g,\mathcal{P}) - \int_{\mathrm{I}} f - \int_{\mathrm{I}} g| \leq |\mathrm{S}(f,\mathcal{P}) - \int_{\mathrm{I}} f| + |\mathrm{S}(g,\mathcal{P}) - \int_{\mathrm{I}} g|,$$

Linéarité : fin

- Posons $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.
- Si $\mathcal{P}$ est δ-fine, alors

$$|\mathrm{S}(f+g,\mathcal{P}) - \int_{\mathrm{I}} f - \int_{\mathrm{I}} g| \leq |\mathrm{S}(f,\mathcal{P}) - \int_{\mathrm{I}} f| + |\mathrm{S}(g,\mathcal{P}) - \int_{\mathrm{I}} g|,$$

et donc

$$|\mathrm{S}(f+g,\mathcal{P}) - \int_{\mathrm{I}} f - \int_{\mathrm{I}} g| \leq 2\varepsilon \ \ :$$

Linéarité : fin

- Posons $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.
- Si $\mathcal{P}$ est δ-fine, alors

$$|\mathrm{S}(f+g,\mathcal{P}) - \int_{\mathrm{I}} f - \int_{\mathrm{I}} g| \leq |\mathrm{S}(f,\mathcal{P}) - \int_{\mathrm{I}} f| + |\mathrm{S}(g,\mathcal{P}) - \int_{\mathrm{I}} g|,$$

et donc

$$|\mathrm{S}(f+g,\mathcal{P}) - \int_{\mathrm{I}} f - \int_{\mathrm{I}} g| \leq 2\varepsilon \ :$$

- $f+g$ est intégrable d'intégrale la somme des intégrales de f et g.

Linéarité : fin

- Posons $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.
- Si $\mathcal{P}$ est δ-fine, alors

$$|\mathrm{S}(f+g,\mathcal{P}) - \int_{\mathrm{I}} f - \int_{\mathrm{I}} g| \leq |\mathrm{S}(f,\mathcal{P}) - \int_{\mathrm{I}} f| + |\mathrm{S}(g,\mathcal{P}) - \int_{\mathrm{I}} g|,$$

et donc

$$|\mathrm{S}(f+g,\mathcal{P}) - \int_{\mathrm{I}} f - \int_{\mathrm{I}} g| \leq 2\varepsilon \ :$$

- $f+g$ est intégrable d'intégrale la somme des intégrales de f et g.
- Le théorème est démontré

Linéarité : fin

- Posons $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.
- Si $\mathcal{P}$ est δ-fine, alors

$$|\mathrm{S}(f+g,\mathcal{P}) - \int_{\mathrm{I}} f - \int_{\mathrm{I}} g| \leq |\mathrm{S}(f,\mathcal{P}) - \int_{\mathrm{I}} f| + |\mathrm{S}(g,\mathcal{P}) - \int_{\mathrm{I}} g|,$$

et donc

$$|\mathrm{S}(f+g,\mathcal{P}) - \int_{\mathrm{I}} f - \int_{\mathrm{I}} g| \leq 2\varepsilon \ :$$

- $f+g$ est intégrable d'intégrale la somme des intégrales de f et g.
- Le théorème est démontré (le cas de λf est trivial).

Positivité

Théorème 0.2. — *Si f est une fonction intégrable sur I, alors*

$$f \geq 0 \implies \int_{\mathrm{I}} f \geq 0.$$

Positivité

Théorème 0.2. — *Si* f *est une fonction intégrable sur* I, *alors*

$$f \geq 0 \implies \int_{\mathrm{I}} f \geq 0.$$

Corollaire 0.1. — *Si* f *et* g *soint intégrables sur* I, *alors*

$$f \leq g \implies \int_{\mathrm{I}} f \leq \int_{\mathrm{I}} g.$$

Positivité

Théorème 0.2. — *Si* f *est une fonction intégrable sur* I, *alors*

$$f \geq 0 \implies \int_{\mathrm{I}} f \geq 0.$$

Corollaire 0.1. — *Si* f *et* g *soint intégrables sur* I, *alors*

$$f \leq g \implies \int_{\mathrm{I}} f \leq \int_{\mathrm{I}} g.$$

- Les démonstrations sont évidentes.

Critère de Cauchy

- Étude des propriétés de suites qui convergent, sans connaitre leur limite :

Critère de Cauchy

- Étude des propriétés de suites qui convergent, sans connaitre leur limite : on utilise le critère de Cauchy.

Critère de Cauchy

- (u_n) suite de nombre réels converge si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathrm{N} \geq 0 \text{ tel que, si } n, m \geq \mathrm{N} \text{ alors } |u_n - u_m| \leq \varepsilon.$$

Critère de Cauchy

Théorème 0.3. — $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ *est intégrable si, et seulement si, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe une jauge* δ *telle que, si* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{Q}$ *sont deux subdivisions* δ*-fines,*

$$|\mathrm{S}(f,\mathcal{P}) - \mathrm{S}(f,\mathcal{Q})| \leq \varepsilon.$$

Critère de Cauchy

Théorème 0.3. — *$f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ est intégrable si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une jauge δ telle que, si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont deux subdivisions δ-fines,*

$$|\mathrm{S}(f, \mathcal{P}) - \mathrm{S}(f, \mathcal{Q})| \leq \varepsilon.$$

- Si f vérifie la seconde partie du théorème, on dit qu'elle vérifie le critère de Cauchy.

Critère de Cauchy

Théorème 0.3. — $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ *est intégrable si, et seulement si, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une jauge* δ *telle que, si* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{Q}$ *sont deux subdivisions* δ*-fines,*

$$|\mathrm{S}(f,\mathcal{P}) - \mathrm{S}(f,\mathcal{Q})| \leq \varepsilon.$$

- Si f vérifie la seconde partie du théorème, on dit qu'elle vérifie le critère de Cauchy.

- Idée de la démonstration : se ramener aux suites.

Preuve du critère de Cauchy

- Fixons $\varepsilon > 0$. Si f est intégrable,

Preuve du critère de Cauchy

- Fixons $\varepsilon > 0$. Si f est intégrable, δ jauge telle que, si $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ sont δ-fines :

Preuve du critère de Cauchy

- Fixons $\varepsilon > 0$. Si f est intégrable, δ jauge telle que, si $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ sont δ-fines :

$$\left|\mathrm{S}(f,\mathcal{P}) - \int_{\mathrm{I}} f\right| \leq \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad \left|\mathrm{S}(f,\mathcal{Q}) - \int_{\mathrm{I}} f\right| \leq \varepsilon/2.$$

Preuve du critère de Cauchy

- Fixons $\varepsilon > 0$. Si f est intégrable, δ jauge telle que, si $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ sont δ-fines :

$$\left|\mathrm{S}(f,\mathcal{P}) - \int_{\mathrm{I}} f\right| \leq \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad \left|\mathrm{S}(f,\mathcal{Q}) - \int_{\mathrm{I}} f\right| \leq \varepsilon/2.$$

- Le critère de Cauchy est vérifié.

Preuve du critère de Cauchy

- Fixons $\varepsilon > 0$. Si f est intégrable, δ jauge telle que, si $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ sont δ-fines :

$$\left|\mathrm{S}(f, \mathcal{P}) - \int_{\mathrm{I}} f\right| \leq \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad \left|\mathrm{S}(f, \mathcal{Q}) - \int_{\mathrm{I}} f\right| \leq \varepsilon/2.$$

- Le critère de Cauchy est vérifié.

- Passons à la réciproque.

Suite de la preuve

- δ_n une jauge telle que : si $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ sont δ_n-fines, alors

Suite de la preuve

- δ_n une jauge telle que : si $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ sont δ_n-fines, alors

$$|\mathrm{S}(f, \mathcal{P}) - f(f, \mathcal{Q})| \leq \frac{1}{n}.$$

Suite de la preuve

- δ_n une jauge telle que : si $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ sont δ_n-fines, alors

$$|\mathrm{S}(f,\mathcal{P}) - f(f,\mathcal{Q})| \leq \frac{1}{n}.$$

Quitte à prendre $\min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$,

Suite de la preuve

- δ_n une jauge telle que : si $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ sont δ_n-fines, alors

$$|\mathrm{S}(f,\mathcal{P}) - f(f,\mathcal{Q})| \leq \frac{1}{n}.$$

- on peut supposer δ_n décroissante.

Suite de la preuve

- δ_n une jauge telle que : si $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ sont δ_n-fines, alors

$$|\mathrm{S}(f,\mathcal{P}) - f(f,\mathcal{Q})| \leq \frac{1}{n}.$$

- on peut supposer δ_n décroissante.

- Pour chaque n, $\mathcal{P}_n$ une subdivision δ_n-fine :

Suite de la preuve

- δ_n une jauge telle que : si $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ sont δ_n-fines, alors

$$|\mathrm{S}(f, \mathcal{P}) - f(f, \mathcal{Q})| \leq \frac{1}{n}.$$

- on peut supposer δ_n décroissante.

- Pour chaque n, $\mathcal{P}_n$ une subdivision δ_n-fine :
- si $m > n$, alors $\mathcal{P}_m$ est aussi δ_n-fine.

Suite de la preuve

- δ_n une jauge telle que : si $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ sont δ_n-fines, alors

$$|\mathrm{S}(f, \mathcal{P}) - f(f, \mathcal{Q})| \leq \frac{1}{n}.$$

- on peut supposer δ_n décroissante.
- Pour chaque n, $\mathcal{P}_n$ une subdivision δ_n-fine :
- si $m > n$, alors $\mathcal{P}_m$ est aussi δ_n-fine.
- La suite de nombres réels $u_n = \mathrm{S}(f, \mathcal{P}_n)$ est de Cauchy :

Suite de la preuve

- δ_n une jauge telle que : si $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ sont δ_n-fines, alors

$$|\mathrm{S}(f,\mathcal{P}) - f(f,\mathcal{Q})| \leq \frac{1}{n}.$$

- on peut supposer δ_n décroissante.

- Pour chaque n, $\mathcal{P}_n$ une subdivision δ_n-fine :
- si $m > n$, alors $\mathcal{P}_m$ est aussi δ_n-fine.
- La suite de nombres réels $u_n = \mathrm{S}(f,\mathcal{P}_n)$ est de Cauchy :

$$\mathrm{N} > 1/\varepsilon,\ n,m \geq \mathrm{N},\ |\mathrm{S}(f,\mathcal{P}_n) - \mathrm{S}(f,\mathcal{P}_m)| < 1/\mathrm{N} < \varepsilon.$$

Fin de la preuve

- Elle converge : notons $\mathrm{S} = \lim \mathrm{S}(f, \mathcal{P}_n)$.

Fin de la preuve

- Elle converge : notons $\mathrm{S} = \lim \mathrm{S}(f, \mathcal{P}_n)$.
- Soit n assez grand, en particulier $n > 2/\varepsilon$, et $\mathcal{Q}$ une jauge δ_n-fine.

Fin de la preuve

- Elle converge : notons $\mathrm{S} = \lim \mathrm{S}(f, \mathcal{P}_n)$.
- Soit n assez grand, en particulier $n > 2/\varepsilon$, et $\mathcal{Q}$ une jauge δ_n-fine.

$$|\mathrm{S}(f, \mathcal{Q}) - \mathrm{S}| \leq |\mathrm{S}(f, \mathcal{Q}) - \mathrm{S}(f, \mathcal{P}_n)| + |\mathrm{S}(f, \mathcal{P}_n) - \mathrm{S}|$$

Fin de la preuve

- Elle converge : notons $\mathrm{S} = \lim \mathrm{S}(f, \mathcal{P}_n)$.
- Soit n assez grand, en particulier $n > 2/\varepsilon$, et $\mathcal{Q}$ une jauge δ_n-fine.

$$|\mathrm{S}(f,\mathcal{Q}) - \mathrm{S}| \leq |\mathrm{S}(f,\mathcal{Q}) - \mathrm{S}(f,\mathcal{P}_n)| + |\mathrm{S}(f,\mathcal{P}_n) - \mathrm{S}|$$

D'où

$$|\mathrm{S}(f,\mathcal{Q}) - \mathrm{S}| \leq 1/n + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Fin de la preuve

- Elle converge : notons $\mathrm{S} = \lim \mathrm{S}(f, \mathcal{P}_n)$.
- Soit n assez grand, en particulier $n > 2/\varepsilon$, et $\mathcal{Q}$ une jauge δ_n-fine.

$$|\mathrm{S}(f,\mathcal{Q}) - \mathrm{S}| \leq |\mathrm{S}(f,\mathcal{Q}) - \mathrm{S}(f,\mathcal{P}_n)| + |\mathrm{S}(f,\mathcal{P}_n) - \mathrm{S}|$$

D'où

$$|\mathrm{S}(f,\mathcal{Q}) - \mathrm{S}| \leq 1/n + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

- f est bien intégrable :

Fin de la preuve

- Elle converge : notons $\mathrm{S} = \lim \mathrm{S}(f, \mathcal{P}_n)$.
- Soit n assez grand, en particulier $n > 2/\varepsilon$, et $\mathcal{Q}$ une jauge δ_n-fine.

$$|\mathrm{S}(f,\mathcal{Q}) - \mathrm{S}| \leq |\mathrm{S}(f,\mathcal{Q}) - \mathrm{S}(f,\mathcal{P}_n)| + |\mathrm{S}(f,\mathcal{P}_n) - \mathrm{S}|$$

D'où

$$|\mathrm{S}(f,\mathcal{Q}) - \mathrm{S}| \leq 1/n + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

- f est bien intégrable :
- le théorème est démontré.

La relation de Chasles

Théorème 0.3. — *Soient* $f : \mathrm{I} = [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ *et* $c \in]a,b[$. *Alors* f *est intégrable sur* $[a,b]$ *si, et seulement si, ses restrictions à* $[a,c]$ *et* $[c,b]$ *le sont. Dans ce cas, on a la relation*

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

C'est pourquoi l'on note aussi l'intégrale de f *sur l'intervalle* $[a,b]$ *sous la forme*

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f.$$

Chasles, preuve, 1

- Supposons f intégrable sur $\mathrm{I}_1 = [a, c]$ et $\mathrm{I}_2 = [c, b]$.

Chasles, preuve, 1

- Supposons f intégrable sur $\mathrm{I}_1 = [a, c]$ et $\mathrm{I}_2 = [c, b]$.
- $\varepsilon > 0$ fixé.

Chasles, preuve, 1

- Supposons f intégrable sur $\mathrm{I}_1 = [a, c]$ et $\mathrm{I}_2 = [c, b]$.
- $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe des jauges δ_i sur I_i, $i = 1, 2$,

Chasles, preuve, 1

- Supposons f intégrable sur $\mathrm{I}_1 = [a, c]$ et $\mathrm{I}_2 = [c, b]$.
- $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe des jauges δ_i sur I_i, $i = 1, 2$, comme dans la définition.

Chasles, preuve, 1

- Supposons f intégrable sur $\mathrm{I}_1 = [a, c]$ et $\mathrm{I}_2 = [c, b]$.
- $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe des jauges δ_i sur I_i, $i = 1, 2$, comme dans la définition.
- On «recolle» les deux jauges :

$$\delta(x) = \min\{\delta_i(x), \frac{1}{2}|x - c|\}, x \in \mathrm{I}_i, \delta(c) = \min\{\delta_1(c), \delta_2(c), \frac{1}{4}\}.$$

Chasles, preuve, 1

- Supposons f intégrable sur $\mathrm{I}_1 = [a, c]$ et $\mathrm{I}_2 = [c, b]$.
- $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe des jauges δ_i sur I_i, $i = 1, 2$, comme dans la définition.
- On «recolle» les deux jauges :

$$\delta(x) = \min\{\delta_i(x), \frac{1}{2}|x - c|\}, x \in \mathrm{I}_i, \delta(c) = \min\{\delta_1(c), \delta_2(c), \frac{1}{4}\}.$$

- Si $\mathcal{P}$ est δ-fine, c est point de marquage.

Chasles, preuve, 1

- Supposons f intégrable sur $\mathrm{I}_1 = [a, c]$ et $\mathrm{I}_2 = [c, b]$.
- $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe des jauges δ_i sur I_i, $i = 1, 2$, comme dans la définition.
- On «recolle» les deux jauges :

$$\delta(x) = \min\{\delta_i(x), \frac{1}{2}|x - c|\}, x \in \mathrm{I}_i, \delta(c) = \min\{\delta_1(c), \delta_2(c), \frac{1}{4}\}.$$

- Si $\mathcal{P}$ est δ-fine, c est point de marquage.
- Coupage-collage : supposons c également borne d'un des intervalles de $\mathcal{P}$.

Chasles, preuve, 1

- Supposons f intégrable sur $\mathrm{I}_1 = [a, c]$ et $\mathrm{I}_2 = [c, b]$.
- $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe des jauges δ_i sur I_i, $i = 1, 2$, comme dans la définition.
- On «recolle» les deux jauges :

$$\delta(x) = \min\{\delta_i(x), \frac{1}{2}|x - c|\}, x \in \mathrm{I}_i, \delta(c) = \min\{\delta_1(c), \delta_2(c), \frac{1}{4}\}.$$

- Si $\mathcal{P}$ est δ-fine, c est point de marquage.
- Coupage-collage : supposons c également borne d'un des intervalles de $\mathcal{P}$.
- Alors $\mathcal{P}_{|\mathrm{I}_i}$ est δ_i-fine.

Chasles, preuve, 2

- Par construction,

Chasles, preuve, 2

- Par construction,

$$\mathrm{S}(f, \mathcal{P}) = \mathrm{S}(f, \mathcal{P}_1) + \mathrm{S}(f, \mathcal{P}_2).$$

Chasles, preuve, 2

- Par construction,

$$\mathrm{S}(f,\mathcal{P}) = \mathrm{S}(f,\mathcal{P}_1) + \mathrm{S}(f,\mathcal{P}_2).$$

- On en tire :

$$\left|\mathrm{S}(f,\mathcal{P}) - \left(\int_{\mathrm{I}_1} f + \int_{\mathrm{I}_2} f\right)\right| \leq \left|\mathrm{S}(f,\mathcal{P}_1) - \int_{\mathrm{I}_1} f\right| + \left|\mathrm{S}(f,\mathcal{P}_2) - \int_{\mathrm{I}_2} f\right| \leq 2\varepsilon.$$

Chasles, preuve, 2

- Par construction,

$$\mathrm{S}(f,\mathcal{P}) = \mathrm{S}(f,\mathcal{P}_1) + \mathrm{S}(f,\mathcal{P}_2).$$

- On en tire :

$$\left|\mathrm{S}(f,\mathcal{P}) - \left(\int_{\mathrm{I}_1} f + \int_{\mathrm{I}_2} f\right)\right| \leq \left|\mathrm{S}(f,\mathcal{P}_1) - \int_{\mathrm{I}_1} f\right| + \left|\mathrm{S}(f,\mathcal{P}_2) - \int_{\mathrm{I}_2} f\right| \leq 2\varepsilon.$$

- Ainsi f est intégrable sur I et

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Chasles, preuve, 2

- Par construction,

$$\mathrm{S}(f,\mathcal{P}) = \mathrm{S}(f,\mathcal{P}_1) + \mathrm{S}(f,\mathcal{P}_2).$$

- On en tire :

$$\left|\mathrm{S}(f,\mathcal{P}) - \left(\int_{\mathrm{I}_1} f + \int_{\mathrm{I}_2} f\right)\right| \leq \left|\mathrm{S}(f,\mathcal{P}_1) - \int_{\mathrm{I}_1} f\right| + \left|\mathrm{S}(f,\mathcal{P}_2) - \int_{\mathrm{I}_2} f\right| \leq 2\varepsilon.$$

- Ainsi f est intégrable sur I et

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

- Passons à la réciproque.

Chasles, preuve, 3

- Conservons les mêmes notations, et supposons f intégrable sur I.

Chasles, preuve, 3

- Conservons les mêmes notations, et supposons f intégrable sur I.
- Fixons $\varepsilon > 0$. Soit δ une jauge donnée par le critère de Cauchy pour f sur I.

Chasles, preuve, 3

- Conservons les mêmes notations, et supposons f intégrable sur I.
- Fixons $\varepsilon > 0$. Soit δ une jauge donnée par le critère de Cauchy pour f sur I.
- Notons $\delta_1 = \delta_{|\mathrm{I}_1}$: c'est une jauge sur I_1.

Chasles, preuve, 3

- Conservons les mêmes notations, et supposons f intégrable sur I.
- Fixons $\varepsilon > 0$. Soit δ une jauge donnée par le critère de Cauchy pour f sur I.
- Notons $\delta_1 = \delta_{|\mathrm{I}_1}$: c'est une jauge sur I_1.
- $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{Q}_1$ deux subdivisions de I_1 qui sont δ_1-fines.

Chasles, preuve, 3

- Conservons les mêmes notations, et supposons f intégrable sur I.
- Fixons $\varepsilon > 0$. Soit δ une jauge donnée par le critère de Cauchy pour f sur I.
- Notons $\delta_1 = \delta_{|\mathrm{I}_1}$: c'est une jauge sur I_1.
- $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{Q}_1$ deux subdivisions de I_1 qui sont δ_1-fines.
- On peut supposer que c est point de marquage de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{Q}_1$.

Chasles, preuve, 4

- Soit $\mathcal{S}$ une subdivision $\delta_{|\mathrm{I}_2}$-fine de I_2,

Chasles, preuve, 4

- Soit $\mathcal{S}$ une subdivision $\delta_{|\mathrm{I}_2}$-fine de I_2, toujours avec c comme point de marquage.

Chasles, preuve, 4

- Soit $\mathcal{S}$ une subdivision $\delta_{|\mathrm{I}_2}$-fine de I_2,
- Si on recolle $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{S}$ en une subdivision $\mathcal{P}$ de I (*idem* avec $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{S}$), en $\mathcal{Q}$

Chasles, preuve, 4

- Soit $\mathcal{S}$ une subdivision $\delta_{|\mathrm{I}_2}$-fine de I_2,
- Si on recolle $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{S}$ en une subdivision $\mathcal{P}$ de I (*idem* avec $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{S}$), en $\mathcal{Q}$ alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont δ-fines,

Chasles, preuve, 4

- Soit $\mathcal{S}$ une subdivision $\delta_{|\mathrm{I}_2}$-fine de I_2,
- Si on recolle $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{S}$ en une subdivision $\mathcal{P}$ de I (*idem* avec $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{S}$), en $\mathcal{Q}$ alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont δ-fines, et ont sur I_2 les mêmes intervalles et points de marquages.

Chasles, preuve, 4

- Soit $\mathcal{S}$ une subdivision $\delta_{|\mathrm{I}_2}$-fine de I_2,
- Si on recolle $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{S}$ en une subdivision $\mathcal{P}$ de I (*idem* avec $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{S}$), en $\mathcal{Q}$ alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont δ-fines, et ont sur I_2 les mêmes intervalles et points de marquages.
- On en déduit :

$$\mathrm{S}(f_{|\mathrm{I}_1}, \mathcal{P}_1) - \mathrm{S}(f_{|\mathrm{I}_1}, \mathcal{Q}_1) = \mathrm{S}(f, \mathcal{P}) - \mathrm{S}(f, \mathcal{Q}),$$

Chasles, preuve, fin

- soit donc, comme $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont δ-fines,

$$|\mathrm{S}(f_{|\mathrm{I}_1}, \mathcal{P}_1) - \mathrm{S}(f_{|\mathrm{I}_1}, \mathcal{Q}_1)| \leq \mathrm{S}(f, \mathcal{P}) - \mathrm{S}(f, \mathcal{Q}) < \varepsilon.$$

Chasles, preuve, fin

- soit donc, comme $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont δ-fines,

$$|\mathrm{S}(f_{|\mathrm{I}_1}, \mathcal{P}_1) - \mathrm{S}(f_{|\mathrm{I}_1}, \mathcal{Q}_1)| \leq \mathrm{S}(f, \mathcal{P}) - \mathrm{S}(f, \mathcal{Q}) < \varepsilon.$$

- Ainsi, $f_{|\mathrm{I}_1}$ vérifie le critère de Cauchy :

Chasles, preuve, fin

- soit donc, comme $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont δ-fines,

$$|\mathrm{S}(f_{|\mathrm{I}_1}, \mathcal{P}_1) - \mathrm{S}(f_{|\mathrm{I}_1}, \mathcal{Q}_1)| \leq \mathrm{S}(f, \mathcal{P}) - \mathrm{S}(f, \mathcal{Q}) < \varepsilon.$$

- Ainsi, $f_{|\mathrm{I}_1}$ vérifie le critère de Cauchy : elle est intégrable sur I_1.
- Pour I_2, la même preuve s'applique :

Chasles, preuve, fin

- soit donc, comme $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont δ-fines,

$$|\mathrm{S}(f_{|\mathrm{I}_1}, \mathcal{P}_1) - \mathrm{S}(f_{|\mathrm{I}_1}, \mathcal{Q}_1)| \leq \mathrm{S}(f, \mathcal{P}) - \mathrm{S}(f, \mathcal{Q}) < \varepsilon.$$

- Ainsi, $f_{|\mathrm{I}_1}$ vérifie le critère de Cauchy : elle est intégrable sur I_1.
- Pour I_2, la même preuve s'applique : le théorème est démontré.

Convention de notation

- La relation de Chasles justifie la convention suivante :

Convention de notation

- La relation de Chasles justifie la convention suivante :
- si $a < b$,

Convention de notation

- La relation de Chasles justifie la convention suivante :
- si $a < b$,

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{[a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Convention de notation

- La relation de Chasles justifie la convention suivante :
- si $a < b$,

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{[a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Passons pour finir à deux autres propriétés intéressantes.

Positivité : forme utile

- Supposons f bornée,

Positivité : forme utile

- Supposons f bornée, soient $m \leq \inf\{f(x), x \in [a,b]\}$,

Positivité : forme utile

- Supposons f bornée, soient $m \leq \inf\{f(x), x \in [a,b]\}$, et $\mathrm{M} \geq \inf(x), x \in [a,b]\}$.

Positivité : forme utile

- Supposons f bornée, soient $m \leq \inf\{f(x), x \in [a,b]\}$, et $\mathrm{M} \geq \inf(x), x \in [a,b]\}$.
- On a alors, pour tout $x \in [a,b]$:

$$m \leq f(x) \leq \mathrm{M},$$

Positivité : forme utile

- Supposons f bornée, soient $m \leq \inf\{f(x), x \in [a,b]\}$, et $\mathrm{M} \geq \inf(x), x \in [a,b]\}$.
- On a alors, pour tout $x \in [a,b]$:

$$m \leq f(x) \leq \mathrm{M},$$

et donc, si f est intégrable :

$$\int_a^b m \,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b \mathrm{M}\,\mathrm{d}x.$$

Intégrale des fonctions bornées

Théorème 0.3. — *Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$. Si f est bornée sur $[a, b]$, il existe deux constantes telles que*

$$\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq \mathrm{M}.$$

On a alors

$$|b - a|m \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq |b - a|\mathrm{M}.$$

Fonctions continues

Théorème 0.4. — *Les fonctions continues sur* $[a, b]$ *sont intégrables sur* $[a, b]$*.*

Fonctions continues

Théorème 0.4. — *Les fonctions continues sur* $[a, b]$ *sont intégrables sur* $[a, b]$.

- Soit f une fonction continue. Fixons $\varepsilon > 0$:

Fonctions continues

Théorème 0.4. — *Les fonctions continues sur* $[a, b]$ *sont intégrables sur* $[a, b]$*.*

- Soit f une fonction continue. Fixons $\varepsilon > 0$: peut-on trouver une jauge adaptée à f ?

Fonctions continues

Théorème 0.4. — *Les fonctions continues sur* $[a, b]$ *sont intégrables sur* $[a, b]$.

- Soit f une fonction continue. Fixons $\varepsilon > 0$: peut-on trouver une jauge adaptée à f ?
- Continuité de f au point x :

Fonctions continues

Théorème 0.4. — *Les fonctions continues sur* $[a, b]$ *sont intégrables sur* $[a, b]$.

- Soit f une fonction continue. Fixons $\varepsilon > 0$: peut-on trouver une jauge adaptée à f ?
- Continuité de f au point x :
- il existe $\delta(x) > 0$ tel que

$$\text{si } |t - x| \leq \delta(x), \text{ alors } |f(t) - f(x)| < \varepsilon.$$

Fonctions continues

Théorème 0.4. — *Les fonctions continues sur* $[a,b]$ *sont intégrables sur* $[a,b]$*.*

- Soit f une fonction continue. Fixons $\varepsilon > 0$: peut-on trouver une jauge adaptée à f ?
- Continuité de f au point x :
- il existe $\delta(x) > 0$ tel que

$$\text{si } |t - x| \leq \delta(x), \text{ alors } |f(t) - f(x)| < \varepsilon.$$

- $\delta : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ est une jauge.

Fonctions continues, 2

- Soient $\mathcal{P} = \{(\mathrm{I}_1, t_1), \ldots, (\mathrm{I}_n, t_n)\}$ et $\mathcal{Q} = \{(\mathrm{J}_1, u_1), \ldots, (\mathrm{J}_p, u_p)\}$ deux subdivisions δ-fines.

Fonctions continues, 2

- Soient $\mathcal{P} = \{(\mathrm{I}_1, t_1), \ldots, (\mathrm{I}_n, t_n)\}$ et $\mathcal{Q} = \{(\mathrm{J}_1, u_1), \ldots, (\mathrm{J}_p, u_p)\}$ deux subdivisions δ-fines.
- Pour chaque couple k, l tel que $\mathrm{I}_k \cap \mathrm{J}_l$ est non vide,

Fonctions continues, 2

- Soient $\mathcal{P} = \{(\mathrm{I}_1, t_1), \ldots, (\mathrm{I}_n, t_n)\}$ et $\mathcal{Q} = \{(\mathrm{J}_1, u_1), \ldots, (\mathrm{J}_p, u_p)\}$ deux subdivisions δ-fines.
- Pour chaque couple k, l tel que $\mathrm{I}_k \cap \mathrm{J}_l$ est non vide, choisissons $y_{kl} \in \mathrm{I}_k \cap \mathrm{J}_l$.

Fonctions continues, 2

- Soient $\mathcal{P} = \{(\mathrm{I}_1, t_1), \ldots, (\mathrm{I}_n, t_n)\}$ et $\mathcal{Q} = \{(\mathrm{J}_1, u_1), \ldots, (\mathrm{J}_p, u_p)\}$ deux subdivisions δ-fines.
- Pour chaque couple k, l tel que $\mathrm{I}_k \cap \mathrm{J}_l$ est non vide, choisissons $y_{kl} \in \mathrm{I}_k \cap \mathrm{J}_l$.
- Par définition de δ, on a

$$|f(t_k) - f(y_{kl})| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |f(u_l) - f(y_{kl})| < \varepsilon.$$

Fonctions continues, 2

- Soient $\mathcal{P} = \{(\mathrm{I}_1, t_1), \ldots, (\mathrm{I}_n, t_n)\}$ et $\mathcal{Q} = \{(\mathrm{J}_1, u_1), \ldots, (\mathrm{J}_p, u_p)\}$ deux subdivisions δ-fines.
- Pour chaque couple k, l tel que $\mathrm{I}_k \cap \mathrm{J}_l$ est non vide, choisissons $y_{kl} \in \mathrm{I}_k \cap \mathrm{J}_l$.
- Par définition de δ, on a

$$|f(t_k) - f(y_{kl})| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |f(u_l) - f(y_{kl})| < \varepsilon.$$

- Par ailleurs,

$$|\mathrm{S}(f, \mathcal{P}) - \mathrm{S}(f, \mathcal{Q})| = \left| \sum_{k,l} (f(t_k) - f(u_l)) |\mathrm{I}_k \cap \mathrm{J}_l| \right|,$$

Fonctions continues, fin

- mais

$$\left|\sum_{k,l}(f(t_k)-f(u_l))|\mathrm{I}_k\cap \mathrm{J}_l|\right| \leq \sum_{k,l}|f(t_k)-f(u_l)||\mathrm{I}_k\cap \mathrm{J}_l|,$$

Fonctions continues, fin

- mais

$$\left|\sum_{k,l}(f(t_k)-f(u_l))|\mathrm{I}_k\cap \mathrm{J}_l|\right|\leq \sum_{k,l}|f(t_k)-f(u_l)||\mathrm{I}_k\cap \mathrm{J}_l|,$$

- tandis que

$$|f(t_k)-f(u_l)|\leq |f(t_k)-f(y_{kl})|+|f(y_{kl})-f(u_l)|<2\varepsilon,$$

Fonctions continues, fin

- mais

$$\left|\sum_{k,l}(f(t_k)-f(u_l))|\mathrm{I}_k\cap \mathrm{J}_l|\right| \le \sum_{k,l}|f(t_k)-f(u_l)||\mathrm{I}_k\cap \mathrm{J}_l|,$$

- tandis que

$$|f(t_k)-f(u_l)| \le |f(t_k)-f(y_{kl})|+|f(y_{kl})-f(u_l)| < 2\varepsilon,$$

- soit donc

$$|\mathrm{S}(f,\mathcal{P})-\mathrm{S}(f,\mathcal{Q})| \le 2\varepsilon(b-a).$$

Inégalité de Cauchy–Schwarz

- Les inégalités de Cauchy–Scwharz permettent d’estimer l’intégrale d’un produit de fonctions.

Inégalité de Cauchy–Schwarz

- Les inégalités de Cauchy–Scwharz permettent d'estimer l'intégrale d'un produit de fonctions.
- On se limite au cas des fonctions continues :

Inégalité de Cauchy–Schwarz

- Les inégalités de Cauchy–Scwharz permettent d'estimer l'intégrale d'un produit de fonctions.
- On se limite au cas des fonctions continues : soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ continues.
- Les fonctions f, g, f^2, g^2, fg sont continues,

Inégalité de Cauchy–Schwarz

- Les inégalités de Cauchy–Scwharz permettent d'estimer l'intégrale d'un produit de fonctions.
- On se limite au cas des fonctions continues : soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ continues.
- Les fonctions f, g, f^2, g^2, fg sont continues, donc intégrables sur $[a, b]$.

Inégalité de Cauchy–Schwarz

- Les inégalités de Cauchy–Scwharz permettent d'estimer l'intégrale d'un produit de fonctions.
- On se limite au cas des fonctions continues : soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ continues.
- Les fonctions f, g, f^2, g^2, fg sont continues, donc intégrables sur $[a, b]$.
- Bien-sûr, pour tout $t > 0$, on a

$$(\sqrt{t}f(x) - \frac{1}{\sqrt{t}}g(x))^2 \geq 0, \quad \forall x,$$

Inégalité de Cauchy–Schwarz

- Les inégalités de Cauchy–Scwharz permettent d'estimer l'intégrale d'un produit de fonctions.
- On se limite au cas des fonctions continues : soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ continues.
- Les fonctions f, g, f^2, g^2, fg sont continues, donc intégrables sur $[a, b]$.
- Bien-sûr, pour tout $t > 0$, on a

$$(\sqrt{t} f(x) - \frac{1}{\sqrt{t}} g(x))^2 \geq 0, \quad \forall x,$$

donc

$$2|f(x)g(x)| \leq t f(x)^2 + \frac{1}{t} g(x)^2.$$

Inégalité de Cauchy–Schwarz

- Par positivité de l'intégrale :

$$2\int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \leq t\int_a^b f^2 + \frac{1}{t}\int_a^b g.$$

Inégalité de Cauchy–Schwarz

- Par positivité de l'intégrale :

$$2\int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \le t\int_a^b f^2 + \frac{1}{t}\int_a^b g.$$

Le premier membre ne dépend pas de t,

Inégalité de Cauchy–Schwarz

- Par positivité de l'intégrale :

$$2\int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \leq t\int_a^b f^2 + \frac{1}{t}\int_a^b g.$$

Le premier membre ne dépend pas de t, le second a pour valeur minimale (exercice)

$$2\sqrt{\int_a^b f^2}\sqrt{\int_a^b g^2},$$

Inégalité de Cauchy–Schwarz

- Par positivité de l'intégrale :

$$2\int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \leq t\int_a^b f^2 + \frac{1}{t}\int_a^b g.$$

Le premier membre ne dépend pas de t, le second a pour valeur minimale (exercice)

$$2\sqrt{\int_a^b f^2}\sqrt{\int_a^b g^2},$$

on en déduit :

Inégalité de Cauchy–Schwarz

Théorème 0.5. — *Soient* f, g *deux fonctions continues sur* $[a, b]$*. Alors*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

Inégalité de Cauchy–Schwarz

Théorème 0.5. — *Soient* f, g *deux fonctions continues sur* $[a, b]$*. Alors*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

Ces inégalités sont en fait vraies de manière plus générale, nous verrons celà plus tard.

Inégalité de Hölder

- On a, plus généralement, l'énoncé suivant (même démonstration) :

Inégalité de Hölder

- On a, plus généralement, l'énoncé suivant (même démonstration) :

Théorème 0.6. — *Soient* f, g *deux fonctions continues sur* $[a, b]$*, et* $p, q > 0$ *tels que* $p^{-1} + q^{-1} = 1$*. Alors*

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \, \mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b f(x)^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} \left(\int_a^b g(x)^q \, \mathrm{d}x \right)^{1/q}.$$

Inégalité de Hölder

- On a, plus généralement, l'énoncé suivant (même démonstration) :

Théorème 0.6. — *Soient* f, g *deux fonctions continues sur* $[a, b]$*, et* $p, q > 0$ *tels que* $p^{-1} + q^{-1} = 1$*. Alors*

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \,\mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b f(x)^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p} \left(\int_a^b g(x)^q \,\mathrm{d}x \right)^{1/q}.$$

- Le cas $p = q = 2$ est celui de l'inégalité de Cauchy–Schwarz. On déduit enfin de cette inégalité la dernière de notre série, l'inégalité de Minkowski.

Inégalité de Minkowski

Théorème 0.7. — *Soient* f, g *deux fonctions continues sur* $[a, g]$*, et* $p > 0$*. Alors*

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

Inégalité de Minkowski

Théorème 0.7. — *Soient f, g deux fonctions continues sur $[a, g]$, et $p > 0$. Alors*

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

- Cette inégalité a une interprétation géométrique :

Inégalité de Minkowski

Théorème 0.7. — *Soient* f, g *deux fonctions continues sur* $[a, g]$, *et* $p > 0$. *Alors*

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

- Cette inégalité a une interprétation géométrique : si l'on pose

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

l'inégalité dit que cela définit sur l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$ une *norme.*

Inégalité de Minkowski

Théorème 0.7. — *Soient f, g deux fonctions continues sur $[a, g]$, et $p > 0$. Alors*

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

- Cette inégalité a une interprétation géométrique : si l'on pose

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

l'inégalité dit que cela définit sur l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$ une *norme.* L'inégalité de Minkowski en est simplement l'inégalité triangulaire.