3 Applications linéaires et matrices

3.1 Applications linéaires

Définition : Une application $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ est dite *additive* si on a $f(u+v) = f(u) + f(v)$ pour tout $u, v \in \mathbb{R}^p$.

Exercice 51 : Montrer que si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ est additive, alors on a $f(0) = 0$ et $f(-u) = -f(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^p$. En déduire qu'on a $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$. [*Commencer par le cas* $\lambda \in \mathbb{N}$.]

Définition : Une application $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ est dite *linéaire* si elle satisfait les deux identités suivantes :

$$f(u+v) = f(u) + f(v) \text{ pour tout } u, v \in \mathbb{R}^p, \qquad f(\lambda u) = \lambda f(u) \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } u \in \mathbb{R}^p.$$

Exercice 52 : Montrer que l'*application nulle* $0 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ définie par $0(u) = 0$ est linéaire, de même que l'*identité* $\mathrm{id} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ définie par $\mathrm{id}(u) = u$ et les *composantes* $\xi_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définies par $\xi_i(x_1, \ldots, x_p) = x_i$.

Exercice 53 : Montrer que si $f, g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ sont linéaires, alors $f + g$ est linéaire, ainsi que λf pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 54 : Montrer que si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ et $g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^r$ sont linéaires, alors $g \circ f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^r$ est linéaire.

Exercice 55 : Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax$ est linéaire, et que toute application linéaire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de cette forme.

Remarque : L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax + b$ est dite *affine*. Pour $b \neq 0$, elle n'est pas linéaire. Attention : les *fonctions linéaires* des physiciens, par exemple, sont en fait des applications affines.

Exercice 56 : Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x) = (ax, bx)$ est linéaire, et que toute application linéaire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est de cette forme.

Exercice 57 : Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = ax + by$ est linéaire, et que toute application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de cette forme. [*Utiliser la base canonique* $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$.]

Définition : L'*image* d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ est l'ensemble $\operatorname{im} f = f(\mathbb{R}^p) = \{f(u) \mid u \in \mathbb{R}^p\}$, et son *noyau* est l'ensemble $\ker f = f^{-1}\{0\} = \{u \in \mathbb{R}^p \mid f(u) = 0\}$.

Exercice 58 : Montrer que toute droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ est l'image d'une application linéaire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et le noyau d'une application linéaire $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Exercice 59 : Monter qu'une application linéaire $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ est injective si et seulement si on a $\ker f = \{0\}$.

3.2 Matrices carrées d'ordre 2

Définition : Une *matrice carrée d'ordre 2* est un tableau de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

On montre comme ci-dessus que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ est linéaire, et que toute application linéaire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est de cette forme.

Définition : On dit que f est *l'application linéaire de matrice* A, ou que A est *la matrice de* f.

Remarque : D'une part, les colonnes de la matrice A correspondent aux vecteurs $f(\vec{\imath}) = (a, c)$ et $f(\vec{\jmath}) = (b, d)$. D'autre part, si on pose $(x', y') = f(x, y)$, alors x' et y' s'expriment au moyen du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy. \end{cases}$$

Exercice 60 : Dans chacun des cas suivants, donner la matrice de l'application linéaire f et dessiner les vecteurs $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$:

- *symétrie de centre* O : $f(x, y) = (-x, -y)$;
- *homothétie de rapport* ρ *et de centre* O : $f(x, y) = (\rho x, \rho y)$;
- *symétrie orthogonale d'axe* $O\vec{\imath}$: $f(x, y) = (x, -y)$;
- *projection orthogonale sur l'axe* $O\vec{\imath}$: $f(x, y) = (x, 0)$;
- *affinité orthogonale de rapport* ρ *et d'axe* $O\vec{\imath}$: $f(x, y) = (x, \rho y)$;
- *rotation d'angle* θ *et de centre* O : $f(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$;
- *similitude de rapport* ρ*, d'angle* θ*, et de centre* O : $f(x, y) = (\rho x\cos\theta - \rho y\sin\theta, \rho x\sin\theta + \rho y\cos\theta)$.

Remarque : Pour $u \neq 0$, la *translation de vecteur* u n'est pas linéaire. Il en va de même pour toute transformation du plan qui ne préserve pas l'origine O : par exemple, la symétrie de centre $O' \neq O$.

Exercice 61 : Donner une interprétation géométrique des matrices carrées suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

3.3 Opérations sur les matrices carrées d'ordre 2

Notation : On pose $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 62 : Dans la base canonique, quelles sont les applications linéaires associées à ces matrices ?

Définition : La *somme* $A + B$ de deux matrices carrées d'ordre 2 est la matrice de $f + g$ où f, g sont les applications linéaires de matrices respectives A et B. De même, si $\lambda \in \mathbb{R}$, le *produit* λA est la matrice de λf.

Exercice 63 : Comment calcule-t-on la somme $A + B$ et le produit λA ?

Remarque : Ces opérations sont formellement les mêmes que celles définies sur les vecteurs de $\mathbb{R}^4$. En particulier, elles vérifient les identités suivantes :

$$(A + B) + C = A + (B + C), \qquad A + \mathbf{0} = A, \qquad A + B = B + A,$$

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A, \quad 1A = A, \quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \quad 0A = \mathbf{0}, \quad \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B, \quad \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

On écrit $-A$ pour $(-1)A$ et $A - B$ pour $A + (-B)$, de sorte que $A - A = 0$.

Exercice 64 : Exprimer x'' et y'' en fonction de x et y sachant que :

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy, \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = a'x' + b'y', \\ y'' = c'x' + d'y'. \end{cases}$$

En déduire la matrice de $f' \circ f$ où f, f' sont les applications linéaires de matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$.

Définition : La matrice ci-dessus est le *produit* $A'A$.

Remarque : Pour calculer $A'A$, il suffit de placer A en haut à droite de A', et de faire le produit *ligne par colonne* :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 65 : Calculer les produits suivants :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}.$$

Exercice 66 : Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer les produits PP, PN, NP, et NN.

Exercice 67 : Calculer $A\mathrm{I}$ et $\mathrm{I}A$, puis $A\mathbf{0}$ et $\mathbf{0}A$. Si $AB = \mathbf{0}$, peut-on en déduire que $A = \mathbf{0}$ ou $B = \mathbf{0}$?

Exercice 68 : Montrer que le produit des matrices n'est pas *commutatif* : on n'a pas nécessairement $AB = BA$.

Définition : Si $AB = BA$, on dit que A *commute avec* B, ou que A et B *commutent*.

Exercice 69 : Quelles sont les matrices qui commutent avec toutes les autres ? [*Utiliser les matrices* P *et* N.]

Exercice 70 : Montrer que le produit des matrices est *associatif* : $(AB)C = A(BC)$.

Remarque : On omet les parenthèses inutiles. Par exemple, on écrit $A + B + C$ pour la somme $A + (B + C)$, ABC pour le produit $A(BC)$, et $AB + CD$ pour la somme $(AB) + (CD)$.

Notation : On définit A^n par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ en posant $A^0 = \mathrm{I}$ et $A^{n+1} = A^n A$. Autrement dit :

$$A^0 = \mathrm{I}, \qquad A^1 = A, \qquad A^2 = AA, \qquad A^3 = AAA, \qquad \ldots, \qquad A^n = A \cdots A \ (n \text{ fois}).$$

Exercice 71 : Exprimer A^{m+n} et A^{mn} en fonction de A^m et/ou de A^n. Montrer que A^m commute avec A^n.

Exercice 72 : Montrer que le produit des matrices est *bilinéaire* :

$$(A+B)C = AC + BC, \qquad A(B+C) = AB + AC, \qquad (\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B).$$

Exercice 73 : À quelle condition sur A et B a-t-on les identités remarquables suivantes :

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB\,? \qquad (A+B)(A-B) = A^2 - B^2\,?$$

3.4 Matrices à q lignes et p colonnes

Définition : Une *matrice à q lignes et p colonnes* ($p, q \geqslant 1$) est un tableau de la forme $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{q,1} & \cdots & a_{q,p} \end{pmatrix}$.
En particulier, une *matrice carrée d'ordre p* est une matrice à p lignes et p colonnes.

Remarque : Les indices i et j sont respectivement le numéro de ligne et le numéro de colonne du *coefficient* $a_{i,j}$. Dans le cas particulier où $p = q = 1$, on identifie la matrice A avec son unique coefficient $a_{1,1}$.

L'application $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ définie par $f(x_1, \ldots, x_p) = (a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p, \ldots, a_{q,1}x_1 + \cdots + a_{q,p}x_p)$ est linéaire, et on montre aisément que toute application linéaire $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ est de cette forme.

Définition : On dit que f est *l'application linéaire de matrice A*, ou que A est *la matrice de f*.

Définition : Si $u = (a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^p$, alors sa *matrice colonne* est $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$ et sa *matrice ligne* est $\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$.

Exercice 74 : Montrer que la première est en fait la matrice de l'application linéaire $u_* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ définie par $u_*(x) = xu$, et que la seconde est celle de l'application linéaire $u^* : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie par $u^*(v) = u \cdot v$ (produit scalaire !).

Remarque : Toute application linéaire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ est donc de la forme u_*. Souvent, on identifie u_* avec le vecteur $u = u_*(1)$: on parle alors de la *matrice de u* plutôt que de la *matrice colonne de u*. De même, toute application linéaire $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ à valeurs scalaires est de la forme u^*. Une telle application s'appelle aussi une *forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$*.

On a vu que la matrice d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s'obtient en juxtaposant les deux matrices colonnes des vecteurs $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$. Il existe une règle analogue pour la matrice d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$.

Exercice 75 : Pour chacune des applications linéaires suivantes $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, écrire les matrices colonnes des vecteurs $f(\vec{\imath})$, $f(\vec{\jmath})$, $f(\vec{k})$, en déduire la matrice de f et le système linéaire correspondant : *symétrie de centre O ; homothétie de rapport ρ et de centre O ; symétrie orthogonale par rapport au plan $O\vec{\imath}\vec{\jmath}$; projection orthogonale sur le plan $O\vec{\imath}\vec{\jmath}$; affinité orthogonale de rapport ρ par rapport au plan $O\vec{\imath}\vec{\jmath}$; symétrie orthogonale d'axe $O\vec{k}$; projection orthogonale sur l'axe $O\vec{k}$; rotation d'angle θ et d'axe $O\vec{k}$ (respectivement d'axe $O\vec{\imath}$ ou d'axe $O\vec{\jmath}$).*

Remarque : Pour les rotations, il faut tenir compte de l'*orientation de l'axe* (*règle du tournevis*).

Exercice 76 : Si $u = (a, b)$ est un vecteur fixé de $\mathbb{R}^2$, déterminer la matrice de l'application linéaire $f_u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f_u(v) = \det(u, v)$.

Exercice 77 : Si $u = (a, b, c)$ est un vecteur fixé de $\mathbb{R}^3$, déterminer la matrice de l'application linéaire $f_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f_u(v) = u \wedge v$.

Notation : On note $\mathbf{0}_{q,p}$ la matrice de l'*application nulle* $0 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ définie par $0(u) = 0$ et I_p la matrice de l'*identité* $\mathrm{id} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ définie par $\mathrm{id}(u) = u$. Par exemple, on a :

$$\mathbf{0}_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas où il n'y a pas d'ambiguïté sur le nombre de lignes ou de colonnes, on écrit $\mathbf{0}$ pour $\mathbf{0}_{p,q}$ et I pour I_p.

Les opérations introduites dans le cas des matrices carrées d'ordre 2 s'étendent de façon évidente aux matrices de type quelconque, mais elles ne sont pas définies dans tous les cas.

Exercice 78 : Pour quels types de matrices la somme $A + B$ est-elle définie ? Même question pour le produit AB.

Les propriétés de ces opérations sont essentiellement les mêmes que celles établies dans le cas des matrices carrées d'ordre 2. En particulier, on a :

$$A + \mathbf{0}_{q,p} = A, \qquad A\mathrm{I}_p = A, \qquad \mathrm{I}_pA = A, \qquad A\mathbf{0}_{q,p} = \mathbf{0}_{q,p}, \qquad \mathbf{0}_{q,p}A = \mathbf{0}_{q,p}.$$

Exercice 79 : Quel est le type de la matrice A dans chacune de ces règles ?

Remarque : Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est la matrice de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est celle du vecteur $u \in \mathbb{R}^2$, alors AX est la matrice colonne du vecteur $f(u)$. En pratique, on a le calcul suivant pour $f(u)$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \end{array}$$

Il y a une formule analogue pour une matrice A de type quelconque.

Exercice 80 : On considère les trois matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A(BC)$ et $(AB)C$. Que dire des résultats et quelle propriété générale illustre cet exemple ?

Exercice 81 : Reprendre l'exercice précédent avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 82 : Donner une interprétation géométrique des matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4 Déterminant et inversion d'une matrice

4.1 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

Définition : Le *déterminant de l'application linéaire* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est $\det f = \det(f(\vec{\imath}), f(\vec{\jmath}))$.

Remarque : $\det f$ est l'aire algébrique d'un parallélogramme, à savoir l'image par f du carré unité.
Exercice 83 : Calculer le déterminant de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dans chacun des cas suivants : *symétrie centrale*, *homothétie*, *symétrie orthogonale axiale*, *projection orthogonale axiale*, *affinité orthogonale axiale*, *rotation*, *similitude*.

Exercice 84 : Montrer que l'application δ définie par $\delta(u, v) = \det(f(u), f(v))$ est une forme bilinéaire alternée. En déduire la formule suivante :

$$\det(f(u), f(v)) = (\det f) \det(u, v).$$

Remarque : Cette formule exprime le fait que $\det f$ est le *facteur de changement d'aire algébrique de* f. Par suite, $|\det f|$ est le *facteur de changement d'aire de* f. A priori, il s'agit de l'aire d'un parallélogramme, mais en fait, cela vaut pour une forme quelconque : polygone, ellipse, ou autre.

Exercice 85 : Si $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sont des applications linéaires, exprimer $\det(g \circ f)$ en fonction de $\det f$ et $\det g$.

Définition : Le *déterminant de la matrice* A est celui de l'application linéaire de matrice A. Autrement dit :

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ alors } \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Exercice 86 : Calculer $\det \mathrm{I}$ et exprimer $\det AB$ en fonction de $\det A$ et $\det B$. [*Utiliser l'exercice précédent*.]

Exercice 87 : Exprimer $\det(\lambda A)$ en fonction de λ et $\det A$.

Exercice 88 : Montrer qu'en général, on ne peut pas exprimer $\det(A + B)$ comme une fonction de $\det A$ et $\det B$. [*Considérer le cas* $A = B = \mathrm{I}$, *puis* $A = \mathrm{I}$ *et* $B = -\mathrm{I}$.]

4.2 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3

Définition : Le *déterminant* d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est $\det f = \det(f(\vec{\imath}), f(\vec{\jmath}), f(\vec{k}))$.

Remarque : $\det f$ est le volume algébrique d'un parallélépipède, à savoir l'image par f du cube unité.

On montre également la formule suivante :

$$\det(f(u), f(v), f(w)) = (\det f) \det(u, v, w).$$

Autrement dit, $\det f$ est le *facteur de changement de volume algébrique de* f. Par suite, $|\det f|$ est le *facteur de changement de volume de* f. A priori, il s'agit du volume d'un parallélépipède, mais en fait, cela vaut pour une forme quelconque : polyhèdre, ellipsoïde, ou autre.

Exercice 89 : Calculer le déterminant de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dans chacun des cas suivants : *symétrie centrale*, *homothétie*, *symétrie orthogonale plane*, *projection orthogonale plane*, *affinité orthogonale plane*, *symétrie orthogonale axiale*, *projection orthogonale axiale*, *rotation*.

Enfin, on définit le déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 de sorte que le déterminant d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est celui de sa matrice :

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \text{ alors } \det A = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}.$$

Exercice 90 : Calculer $\det \mathrm{I}_3$ et exprimer $\det AB$ en fonction de $\det A$ et $\det B$.

Exercice 91 : Exprimer $\det(\lambda A)$ en fonction de λ et $\det A$. Comparer avec l'exercice 87.

4.3 Inverse d'une matrice carrée

Définition : Si $AB = \mathrm{I}_p$, on dit que B est un *inverse à droite* de A, et que A est un *inverse à gauche* de B. On dit aussi que A est *inversible à droite* et que B est *inversible à gauche*.

Exercice 92 : La matrice I_p est-elle inversible à droite ? à gauche ? Mêmes questions pour la matrice $\mathbf{0}_{p,q}$.

Exercice 93 : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ une matrice ligne. Quels sont ses inverses à droite ? à gauche ?

Exercice 94 : Montrer que si A est une matrice carrée d'ordre p inversible à droite ou à gauche, alors $\det A \neq 0$.

Exercice 95 : Montrer que si $AC = BC$ et C est inversible à droite, alors $A = B$ (*simplification à droite*).

Remarque : De même, si $AB = AC$ et A est inversible à gauche, alors $B = C$ (*simplification à gauche*).

Exercice 96 : Montrer que si B est un inverse à droite de A et C est un inverse à gauche de A, alors $B = C$.

On considère maintenant le cas d'une matrice A carrée d'ordre p.

Définition : On dit que B est un *inverse* de A si B est à la fois un inverse à droite et un inverse à gauche de A, c'est-à-dire si B est une matrice carrée d'ordre p telle que $AB = \mathrm{I}_p = BA$. On dit alors que A est *inversible*.

Exercice 97 : Montrer que si A est inversible, alors il existe un unique inverse de A, qui est aussi l'unique inverse à droite de A et l'unique inverse à gauche de A.

Notation : On note alors A^{-1} cet unique inverse, et plus généralement, on pose $A^{-n} = (A^{-1})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : A^{-1} est inversible, et son inverse est A.

Exercice 98 : Montrer que si A et B sont des matrices carrées d'ordre p inversibles, alors AB est aussi inversible. Quel est son inverse ?

Exercice 99 : Montrer que si A est inversible, alors A^n est aussi inversible pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Quel est son inverse ? [*Commencer par le cas* $n \in \mathbb{N}$.]

Remarque : On n'écrit pas $\dfrac{1}{A}$ pour A^{-1}, ni surtout $\dfrac{A}{B}$ pour AB^{-1}. Pourquoi ?

4.4 Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et posons $A^\sharp = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. [*La notation standard est* ${}^t\widetilde{A}$.]

Exercice 100 : Calculer $A^{\sharp\sharp}$ et $\det A^\sharp$. Dans quel cas a-t-on $A = A^\sharp$?

Exercice 101 : Calculer $AA^\sharp$ et $A^\sharp A$. En déduire que si $\det A \neq 0$, alors A est inversible, et dans ce cas, exprimer A^{-1} en fonction de $A^\sharp$ (*formule de l'inverse*). En déduire le théorème ci-dessous :

Théorème 2 : Pour toute matrice A carrée d'ordre 2, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible ; 2. A est inversible à droite ; 3. A est inversible à gauche ; 4. $\det A \neq 0$.

Remarque : Dans ce cas, on ne parlera plus d'inverse à droite ou d'inverse à gauche, mais seulement d'inverse.

Exercice 102 : Inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et vérifier qu'on a bien $AA^{-1} = \mathrm{I} = A^{-1}A$.

Exercice 103 : Inverser les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Exercice 104 : Donner un exemple de matrice carrée non nulle, mais non inversible.

Exercice 105 : Dans le cas où A est inversible, exprimer $\det A^{-1}$ en fonction de $\det A$.

Exercice 106 : Montrer que si A et B sont deux matrices carrées d'ordre 2 telles que $C = AB$ est inversible, alors A et B sont aussi inversibles. Dans ce cas, exprimer A^{-1} et B^{-1} en fonction de A, B, et C^{-1}.

Exercice 107 : Montrer qu'une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $\det f = 0$ n'est ni surjective, ni injective. [*Considérer l'image et le noyau de* f.] En déduire le théorème ci-dessous :

Théorème 3 : Pour toute application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est bijective ; 2. f est surjective ; 3. f est injective ; 4. $\det f \neq 0$.

Dans ce cas, l'application réciproque f^{-1} est linéaire et sa matrice est l'inverse de celle de f.

Remarque : Ces théorèmes s'étendent au cas d'une matrice carrée d'ordre p et à celui d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$. De plus, il existe une formule pour l'inverse d'une matrice carrée d'ordre p (*formule de Cramer*).