Université de Provence 2004-2005

Partiel - Algèbre et analyse

MERCREDI 27 OCTOBRE

Questions de cours

Donner les définitions de:

0,5 • $E = F$ (où E et F sont deux ensembles);

0,5 • $f = g$ (où $f : E \to F$ et $g : G \to H$ sont deux applications);

0,5 • f est une application injective.

Partie I

1. Montrer que, pour tout ensemble E,

0,5 $$\emptyset \subset E \quad \text{et} \quad E \subset E.$$

2. Montrer que, si A, B, C sont des sous-ensembles d'un ensemble E,

1,5 $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

0,5 3. Si $E = \{a, b, c\}$, écrire $\mathcal{P}(E)$ en extension.

Partie II

1 1. Si $f : E \to F$ est une application et $B_1, B_2 \in \mathcal{P}(F)$, montrer que $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

0,5+0,5 A-t-on $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ pour $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(E)$?

1 2. Soient deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer que, si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

3. Donner la définition de:

0,5 $f : E \to F$ est une application inversible.

0,5 En déduire que $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, est inversible.

4. Déterminer les domaines de définition des fonctions réelles définies par:

1+1 $$f(x) = \ln(\tan x) \quad \text{et} \quad g(x) = \tan(\ln x).$$

5. Soit f la fonction réelle définie par

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}.$$

0,5 a) Vérifier que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

0,5 b) Déterminer $\mathrm{Im}f$.

1 c) Déterminer $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{1\})$ et $f^{-1}(\{-1\})$.

TX2

Corrigé du partiel (27 octobre)

Question de cours

- $E = F$ si tout élément de E appartient à F, et tout élément de F appartient à E.
- Deux applications $f : E \to F$ et $g : G \to H$ sont égales si $\begin{cases} E = G \\ F = H \\ \forall x \in E \quad f(x) = g(x) \end{cases}$
- $f : E \to F$ est injective si $\forall x_1, x_2 \in E \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
  (ou bien, si $\forall x_1, x_2 \in E \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$).

Partie 1

1. L'ensemble vide est inclus dans E, parce que la négation de cette proposition consisterait à dire "l'ensemble vide n'est pas inclus dans E", c'est à dire qu'il existe des éléments de l'ensemble vide qui n'appartiennent pas à E ; or cette dernière proposition est fausse puisque l'ensemble vide n'a pas d'élément.

   E est inclus dans E, parce que tout élément de E appartient évidemment à E.

2. Soit x un élément de $A \cap (B \cup C)$
   $x \in A$, et x appartient à B ou C.
   Donc x appartient à A et B, ou à A et C.
   $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
   On a démontré $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
   Soit y un élément de $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
   y appartient à A et B, ou à A et C.
   Dans les deux cas il appartient à A ; de plus il appartient à B ou C
   $y \in A \cap (B \cup C)$
   On a démontré $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$.
   Ces deux inclusions prouvent que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup A \cap C$.

3. $\{a, b, c\}$ est l'ensemble E dont les trois éléments sont a, b et c.
   Les parties de E sont des ensemble de 0, 1, 2, ou 3 éléments, choisis parmi a, b ou c. En écrivant successivement les parties de 0 élément, 1 élément, 2 éléments et 3 éléments, on obtient toutes les parties de E :
   $\emptyset$, $\{a\}, \{b\}, \{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$.

Partie II

1. Démontrons que les éléments de $f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ sont éléments de $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Soit $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$; alors $f(x) \in B_1 \cap B_2$

$f(x) \in B_1$ et $f(x) \in B_2$

$x \in f^{-1}(B_1)$ et $x \in f^{-1}(B_2)$

(rappel : $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des x tels que $f(x)$ appartienne à B).

$x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

On a donc $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Démontrons que les éléments de $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ appartiennent à $f^{-1}(B_1 \cap B_2)$.

Soit $x' \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

$x' \in f^{-1}(B_1)$ et $x' \in f^{-1}(B_2)$

$f(x') \in B_1$ et $f(x') \in B_2$

$f(x') \in B_1 \cap B_2$

$x' \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$

donc on a bien $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cap B_2)$.

D'après les deux inclusions, $\boxed{f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)}$.

On n'a pas toujours $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$, parce que A_1 et A_2 peuvent être disjoints tandis que $f(A_1)$ et $f(A_2)$ sont égaux.

Dans le cas où $f(x)$ est la fonction $\cos x$

avec $A_1 = [0, 2\pi[$ et $A_2 = [2\pi, 4\pi[$

A_1 et A_2 sont disjoints c'est à dire $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

donc $f(A_1 \cap A_2) = \emptyset$ (aucun réel n'est l'image d'un $x \in \emptyset$)

et par contre $f(A_1) = [-1, 1]$ ($\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$, $\cos x$ prend toutes les valeurs entre -1 et 1)

et de même $f(A_2) = [-1, 1]$

donc $f(A_1) \cap f(A_2) = [-1, 1] \cap [-1, 1]$

$= [-1, 1]$ est différent de $f(A_1 \cap A_2) = \emptyset$.

2. On suppose $g \circ f$ injective.

L'égalité $f(x_1) = f(x_2)$ implique-t-elle $x_1 = x_2$?

oui car $f(x_1) = f(x_2)$ implique $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

c'est à dire $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$

donc $x_1 = x_2$ puisque $g \circ f$ est injective.

Ceci prouve que f aussi est injective.

3. $f : E \to F$ est inversible s'il existe une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$.

(Id_E est l'application de E dans E définie par $Id_E(x) = x$).

Par exemple $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln x$, est inversible parce que $\ln(e^x) = x$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$) et $e^{\ln x} = x$ (pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$).

(ici, la fonction g est l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $g(x) = e^x$).

4. $\ln(\tan x)$ existe si $\tan x$ est strictement positif, c'est à dire si $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}[$

Le domaine de définition de $\ln(\tan x)$ est donc la réunion des intervalles $]k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}[$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

$\tan(\ln x)$ est défini si $x \in \mathbb{R}_+^*$, et à condition que $\tan(\ln x)$ soit défini, c'est à dire $\ln x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, ou $x \neq e^{\frac{\pi}{2} + k\pi}$

Le domaine de définition de $\tan(\ln x)$ est donc $\mathbb{R}_+^* \setminus \left\{ e^{\frac{\pi}{2} + k\pi} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

5. a) $f(x) = \sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{(x+1)^2}$

est défini en tout $x \in \mathbb{R}$ puisque $(x+1)^2$ est toujours positif ou nul.

b) $\mathrm{Im} f$ est l'ensemble des $f(x)$;

c'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^+$ puisque chaque $f(x)$ appartient à $\mathbb{R}^+$ ($\sqrt{(x+1)^2} \geq 0$).

Vérifions que $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^+$.

Soit y un élément de $\mathbb{R}^+$; alors $y = \sqrt{(y-1+1)^2}$

c'est à dire $y = f(y-1)$

donc $y \in \mathrm{Im} f$.

On a démontré les deux inclusions $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^+ \subset \mathrm{Im} f$, donc $\boxed{\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^+}$.

c) $f^{-1}(\{0\})$ est l'ensemble des x tels que $f(x)$ appartienne à $\{0\}$

autrement dit $f(x) = 0$

$f(x) = 0 \iff \sqrt{(x+1)^2} = 0 \iff (x+1)^2 = 0$ c'est à dire $x = -1$

On a donc $\boxed{f^{-1}(\{0\}) = \{-1\}}$.

$f^{-1}(\{1\})$ = ensemble des x tels que $f(x) = 1$

$\sqrt{(x+1)^2} = 1$

$(x+1)^2 = 1$ d'où $x^2 + 2x = 0$

$x(x+2) = 0$

$x = 0$ ou -2

donc $\boxed{f^{-1}(\{1\}) = \{0, -2\}}$

$\boxed{f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset}$ puisque aucun x ne vérifie $f(x) = -1$ ($f(x)$ est toujours positif)

Université de Provence	Licence Mathématiques-Informatique Première année

Deuxième session

Algèbre et analyse élémentaires

Durée: deux heures. Sans documents ni calculettes.

2004-2005 — 17 juin 2005

Les quatre exercices sont indépendants

Exercice 1

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est muni de la relation d'ordre habituelle (ordre canonique). Soit A un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$.

1. (a) Ecrire, à l'aide de quantificateurs, la propriété : M est la borne supérieure de A.
   (b) Ecrire, à l'aide de quantificateurs, la propriété : M n'est pas la borne supérieure de A.
2. On note $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A,\ x = -a\} = \{-a \mid a \in A\}$.
   Montrer que $\sup(-A) = -\inf(A)$.

Exercice 2

On définit sur $\mathbb{C}^*$ une relation binaire $\mathcal{R}$ par:

$$\forall (z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2, \quad z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}_*^+ \quad z' = \alpha z$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}^*$.
2. Décrire et dessiner les classes de 1, $2i$, $-1+i$.
3. Donner toutes les classes d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}$.
4. Définir (très soigneusement) une bijection entre l'ensemble quotient $\mathbb{C}^*/\mathcal{R}$ et le cercle $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$.

Exercice 3

On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = a > 1, \qquad u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n > 1$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
3. (a) Justifier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) Quelle est sa limite ?

Exercice 4

Le sous-ensemble $E = \{-1, 1, i, -i\}$ de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes muni de la loi usuelle de multiplication dans $\mathbb{C}$ est-il un groupe ?

Université de Provence 2005–2006

Partiel - Algèbre et Analyse Élémentaires

MERCREDI 9 NOVEMBRE

Exercice I

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

a) Montrer que, si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

b) Montrer que, si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

c) Trouver un exemple où $g \circ f$ est bijective et ni g ni f ne sont bijectives.

Exercice II

Soit u la fonction réelle définie par

$$u(x) = \sqrt{\ln(\tan x)}.$$

a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de u. Écrire $\mathcal{D}$ comme une réunion d'intervalles.

b) Déterminer l'image directe et réciproque par u de l'intervalle $[0, 1]$.

Exercice III

Soit l'ensemble $E = \{a, b, c\}$.

a) Écrire $\mathcal{P}(E)$.

b) Rappeler la définition de :"*l'inclusion, notée* $\subset$*, est une relation d'ordre partiel dans* $\mathcal{P}(E)$".

c) Quels sont les éléments extrémaux de $\mathcal{P}(E)$?

d) Soient $A = \{\emptyset, \{a\}\}$. Déterminer les minorants et majorants de A, ainsi que $\inf A$ et $\sup A$.

e) Même question pour $B = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$.

Exercice IV

On définit sur $\mathbb{C}$ la relation $\mathcal{R}$, par

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,\ z_1 \mathcal{R} z_2 \text{ lorsqu'il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } z_1 - z_2 = 2k\pi.$$

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

b) Si on note $z = a+ib$ les nombres complexes, avec a et b réels, et $\mathrm{cl}(z)$ la classe de z pour la relation $\mathcal{R}$, décrire $\mathrm{cl}(0)$, $\mathrm{cl}(1)$, $\mathrm{cl}(i)$ et $\mathrm{cl}(1+i)$. Représenter ces classes dans le plan complexe.

c) Pour tout élément (a, b) de $\mathbb{R}^2$, montrer qu'il existe $a_0 \in [0, 2\pi[$ tel que $\mathrm{cl}(a+ib) = \mathrm{cl}(a_0+ib)$.

d) Montrer que l'application $\varphi : [0, 2\pi[\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}/\mathcal{R}$ définie par

$$\varphi(\alpha, \beta) = \mathrm{cl}(\alpha + i\beta)$$

est bijective.

Université de Provence 2005–2006

Corrigé du partiel - Algèbre et Analyse Élémentaires

MERCREDI 9 NOVEMBRE

Exercice I

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

a) Montrer que, si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

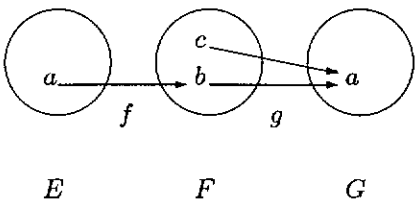
Réponse: Tout élément $y \in G$ a un antécédent $x \in E$ par la surjection $g \circ f$; il a donc pour antécédent $f(x)$ par l'application g, ce qui prouve que g est surjective.

b) Montrer que, si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

Réponse: Si $f(x_1) = f(x_2)$ alors $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ donc $x_1 = x_2$.

c) Trouver un exemple où $g \circ f$ est bijective et ni g ni f ne sont bijectives.

Réponse: le contrexemple $E = G = \{a\}$ et $F = \{b, c\}$, avec $f(a) = b$ et $g(b) = g(c) = a$. L'application f n'est pas surjective puisque $f(E)$ n'a qu'un seul puisque $g(b) = g(c)$. L'application $g \circ f$ est bijective: c'est l'identité sur E.



Exercice II

Soit u la fonction réelle définie par

$$u(x) = \sqrt{\ln(\tan x)}.$$

a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de u. Écrire $\mathcal{D}$ comme une réunion d'intervalles.

Réponse: $\tan x$ *est défini pour* $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. $\tan x$ *est strictement positif pour* $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$. $\ln(\tan x)$ *est positif ou nul pour* $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$. *Ce dernier ensemble est le domaine de définition de la fonction* $u(x) = \sqrt{\ln(\tan x)}$.

b) Déterminer l'image directe et réciproque par u de l'intervalle $[0,1]$.

Réponse: L'image directe de $[0,1]$ *par* u *est* $\left[u\left(\frac{\pi}{4}\right), u(1)\right[$ *c'est à dire* $\left[0, \sqrt{\ln(\tan 1)}\right[$. *L'image réciproque de* $[0,1]$ *par* u *est* $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{4} + k\pi, \arctan(e) + k\pi\right[$.

Exercice III

Soit l'ensemble $E = \{a, b, c\}$.

a) Écrire $\mathcal{P}(E)$.

Réponse: $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$.

b) Rappeler la définition de :*"l'inclusion, notée* $\subset$*, est une relation d'ordre partiel dans* $\mathcal{P}(E)$*"*.

Réponse: Pour tout A, B *et* C *éléments de* $\mathcal{P}(E)$, *on a*

$A \subset A$;

si $A \subset B$ *et* $B \subset A$ *alors* $A = B$;

si $A \subset B$ *et* $B \subset C$ *alors* $A \subset C$;

et il existe A *et* B *éléments de* $\mathcal{P}(E)$ *tels que: ni* $A \subset B$ *ni* $B \subset A$.

c) Quels sont les éléments extrémaux de $\mathcal{P}(E)$?

Réponse: $\emptyset$ *et* E.

d) Soient $A = \{\emptyset, \{a\}\}$. Déterminer les minorants et majorants de A, ainsi que $\inf A$ et $\sup A$.

Réponse: le minorant de A *est* $\emptyset$*; les majorants de* A *sont* $\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}$ *(c'est à dire les éléments de* $\mathcal{P}(E)$ *qui contiennent chacun des deux éléments de* A*).*

$\inf A = \emptyset$ *et* $\sup A = \{a\}$ *(c'est un majorant de* A *qui est inclus dans chacun des quatre majorants de* A*).*

e) Même question pour $B = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$.

Réponse: le minorant de B *est* $\emptyset$*; le majorant de* B *est* $\{a,b,c\}$ *(c'est le seul élément de* $\mathcal{P}(E)$ *qui contient chacun des quatre éléments de* B*).*

$\inf B = \emptyset$ *et* $\sup B = \{a,b,c\} = E$.

Exercice IV

On définit sur $\mathbb{C}$ la relation $\mathcal{R}$, par

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,\ z_1 \mathcal{R} z_2 \text{ lorsqu'il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } z_1 - z_2 = 2k\pi.$$

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Réponse: Pour tout z_1, z_2 et z_3 éléments de $\mathbb{C}$, on a

$z_1 \mathcal{R} z_1$ parce que $z_1 - z_1 = 2 \cdot 0 \cdot \pi$;

si $z_1 \mathcal{R} z_2$ alors $z_2 \mathcal{R} z_1$ ($z_2 - z_1 = 2(-k)\pi$);

si $z_1 \mathcal{R} z_2$ et $z_2 \mathcal{R} z_3$ alors $z_1 \mathcal{R} z_3$ (les égalités $z_1 - z_2 = 2k_1\pi$ et $z_2 - z_3 = 2k_2\pi$ impliquent $z_1 - z_3 = 2(k_1 + k_2)\pi$).

b) Si on note $z = a + ib$ les nombres complexes, avec a et b réels, et $\mathrm{cl}(z)$ la classe de z pour la relation $\mathcal{R}$, décrire $\mathrm{cl}(0)$, $\mathrm{cl}(1)$, $\mathrm{cl}(i)$ et $\mathrm{cl}(1+i)$. Représenter ces classes dans le plan complexe.

Réponse: $z \in cl(0) \Leftrightarrow z - 0 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. La classe de 0 est donc l'ensemble des $2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

De même,

la classe de 1 est l'ensemble des $1 + 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$

la classe de i est l'ensemble des $i + 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$

la classe de $1 + i$ est l'ensemble des $1 + i + 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

c) Pour tout élément (a, b) de $\mathbb{R}^2$, montrer qu'il existe $a_0 \in [0, 2\pi[$ tel que $\mathrm{cl}(a + ib) = \mathrm{cl}(a_0 + ib)$.

Réponse: Comme $(a + ib)\mathcal{R}(a_0 + ib)$, on a $a - a_0 = 2k\pi$. On en déduit

$$\frac{a}{2\pi} = k + \frac{a_0}{2\pi}$$

et par conséquent

$$\frac{a}{2\pi} \in [k, k+1[.$$

Finalement k est la partie entière de $\frac{a}{2\pi}$ et

$$a_0 = a - 2\pi E\left(\frac{a}{2\pi}\right).$$

d) Montrer que l'application $\varphi : [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \to \mathbb{C}/\mathcal{R}$ définie par

$$\varphi(\alpha, \beta) = \mathrm{cl}(\alpha + i\beta)$$

est bijective.

Réponse: 1) Injectivité, $\varphi(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha', \beta')$ implique $(\alpha - \alpha') + i(\beta - \beta')$ avec $k \in \mathbb{Z}$, donc $\beta = \beta'$ et, compte tenu que α et α' sont dans l'intervalle $[0, 2\pi[$, $\alpha = \alpha'$.

2) La surjectivité est une conséquence du résultat obtenu à la question c: tout $a + ib \in \mathbb{C}$ est l'image par φ de $(a_0, b) \in [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$.

Université de Provence 2005–2006

Partiel - Algèbre et Analyse Élémentaires

MARDI 6 DÉCEMBRE

Exercice I

1. Montrer que, si $a \in \mathbb{R}$,

a) $(\forall \varepsilon > 0,\ 0 \leq a < \varepsilon) \Rightarrow a = 0$;

b) $(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq a \leq \frac{1}{n}) \Rightarrow a = 0$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\begin{cases} f_\alpha(x) = x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ f_\alpha(x) = \alpha + x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

a) Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, calculer $f_\alpha(-\alpha)$ et $f_\alpha(0)$; en déduire que f_α n'est pas injective.

b) Soit $\alpha \in \mathbb{Q}$, montrer que si $x \notin \mathbb{Q}$ alors $x + \alpha \notin \mathbb{Q}$. En déduire les images directes $f_\alpha(\mathbb{Q})$ et $f_\alpha(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

Exercice II

1. On considère la suite u de terme général $u_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ pour $n \geq 1$ et les applications $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définies par $g(n) = 2n$ et $h(n) = 2n + 1$.

a) Déterminer les suites $v = u \circ g$ et $w = u \circ h$.

b) Montrer en utilisant la définition que v converge vers une limite ℓ que l'on déterminera. Même question pour w.

c) En déduire que u n'est pas convergente.

2. Soit $a \in]-1, 1[$, $a \neq 0$. Montrer que la suite $u_n = \sum_{k=0}^{n} a^k \sin k$ est convergente en montrant que c'est une suite de Cauchy.

Exercice III

On considère les suites définies par:

$$a_n = q^n \text{ (où } q \in \mathbb{R}), \quad b_n = \frac{2^n}{n!}, \quad c_n = \frac{a^n}{n!} \text{ (où } a \in \mathbb{R}), \quad d_n = \frac{a^n}{n^p} \text{ (où } a \in \mathbb{R} \text{ et } a > 1, \text{ avec } p \in \mathbb{N}).$$

1. Déterminer les valeurs de q pour lesquelles a_n converge vers une limite que l'on précisera.

2. Montrer que $b_n < 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$ à partir d'un certain rang; en déduire que b_n converge vers une limite que l'on précisera.

3. Même question pour c_n en montrant que

$$|c_n| < K \cdot \left(\frac{|a|}{n_0}\right)^{n-n_0+1}$$

où $n_0 > |a|$, et K est une constante à préciser.

4. **a)** Montrer que la suite $\left(\frac{n}{n+1}\right)^p$ pour $p \in \mathbb{N}$ converge, quand $n \to +\infty$, vers une limite à préciser.

b) Montrer alors que si $a > 1$:

$$a \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^p > K' > 1$$

à partir d'un certain rang, pour une valeur de K' à préciser.

c) En déduire que $d_{n+1} > K' d_n$ à partir d'un certain rang, et que d_n diverge.

Université de Provence 2005–2006

Corrigé du partiel - Algèbre et Analyse Élémentaires

MARDI 6 DÉCEMBRE

[1]

Exercice I

1. Montrer que, si $a \in \mathbb{R}$,

a) $(\forall \varepsilon > 0,\ 0 \leq a < \varepsilon) \Rightarrow a = 0$;

Supposons $(\forall \varepsilon > 0,\ 0 \leq a < \varepsilon)$. *On a alors* $a \geq 0$, *et si* $a > 0$ *on a aussi* $a < \frac{a}{2}$ *(en faisant* $\varepsilon = \frac{a}{2}$*). Mais cette inégalité implique* $a - \frac{a}{2} < 0$ *c'est à dire* $a < 0$, *et elle contredit l'hypothèse* $0 \leq a$. *Donc la seule possibilité est* $a = 0$.

b) $(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq a \leq \frac{1}{n}) \Rightarrow a = 0$.

Supposons maintenant $(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq a \leq \frac{1}{n})$. *Si* a *n'est pas nul,* $\frac{1}{a}$ *existe et* ($\mathbb{R}$ *étant archimèdien) il existe un entier* n *tel que* $n \cdot 1 > \frac{1}{a}$, *et par conséquent* $a > \frac{1}{n}$. *Mais on a supposé le contraire, donc* a *est nul,.*

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\begin{cases} f_\alpha(x) = x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ f_\alpha(x) = \alpha + x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

a) Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, calculer $f_\alpha(-\alpha)$ et $f_\alpha(0)$; en déduire que f_α n'est pas injective.

Tous deux valent 0, f *n'est donc pas injective.*

b) Soit $\alpha \in \mathbb{Q}$, montrer que si $x \notin \mathbb{Q}$ alors $x + \alpha \notin \mathbb{Q}$. En déduire les images directes $f_\alpha(\mathbb{Q})$ et $f_\alpha(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

Supposons $x \notin \mathbb{Q}$. *Si* $x + \alpha$ *appartenait* $\mathbb{Q}$, *alors* x *(qui est égal à* $(x + \alpha) - \alpha$*) appartiendrait aussi* $\mathbb{Q}$ *(on sait qu'en réduisant au même dénominateur, la différence de deux nombres rationnels est rationnelle).*

Exercice II

1. On considère la suite u de terme général $u_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ pour $n \geq 1$ et les applications $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définies par $g(n) = 2n$ et $h(n) = 2n + 1$.

a) Déterminer les suites $v = u \circ g$ et $w = u \circ h$.

$v_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)$ *et* $w_n = -\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$.

[1] Les notes se trouvent sur le site: http://site.voila.fr/a.thomas

Rappel: Le tutorat amphi 2 a lieu mercredi 7 et 14 décembre dans les salles 608 et 616 au 6ème étage bloc A.

L'atelier numérique du jeudi 8 décembre, salles 31 et 32 au 3ème étage.

b) Montrer en utilisant la définition que v converge vers une limite ℓ que l'on déterminera. Même question pour w.

v converge vers 1: $|v_n - 1| = \dfrac{1}{2n}$ est plus petit que ε quand n est plus grand que la partie entière de $\dfrac{1}{\varepsilon} + 1$, puisque cette condition implique $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ et $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

w converge vers -1: pour la même raison, $|v_n - (-1)| = \dfrac{1}{2n+1}$ est plus petit que ε quand n est plus grand que la partie entière de $\dfrac{1}{\varepsilon} + 1$.

c) En déduire que u n'est pas convergente.

Si elle était convergente, les suites extraites v et w convergeraient vers la même limite.

2. Soit $a \in]-1, 1[$, $a \neq 0$. Montrer que la suite $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k \sin k$ est convergente en montrant que c'est une suite de Cauchy.

Pour $m < n$,

$$\begin{aligned} |u_n - u_m| &= \left| \sum_{k=m+1}^{n} a^k \sin k \right| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{n} |a|^k \\ &\leq |a|^{m+1} \sum_{k=0}^{n-m-1} |a| \\ &\leq |a|^{m+1} \cdot \frac{1 - |a|^{n-m}}{1 - |a|} \\ &\leq \frac{|a|^{m+1}}{1 - |a|} \end{aligned}$$

La suite $\dfrac{|a|^{m+1}}{1-|a|}$ converge vers 0 quand $n \to +\infty$ (parce que $a \in]-1, 1[$), donc (étant donné $\varepsilon > 0$) on a $\dfrac{|a|^{m+1}}{1-|a|} < \varepsilon$ et par conséquent $|u_n - u_m| < \varepsilon$ à partir d'un certain rang (c'est à dire pour m et n assez grands).

Exercice III

On considère les suites définies par:

$$a_n = q^n \text{ (où } q \in \mathbb{R}), \quad b_n = \frac{2^n}{n!}, \quad c_n = \frac{a^n}{n!} \text{ (où } a \in \mathbb{R}), \quad d_n = \frac{a^n}{n^p} \text{ (où } a \in \mathbb{R} \text{ et } a > 1, \text{ avec } p \in \mathbb{N}).$$

1. Déterminer les valeurs de q pour lesquelles a_n converge vers une limite que l'on précisera.

a_n converge vers 0 si $q \in]-1, 1[$, et vers 1 si $q = 1$.

2. Montrer que $b_n < 2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}$ à partir d'un certain rang; en déduire que b_n converge vers une limite que l'on précisera.

$0 < b_n = \dfrac{2}{1} \cdot \dfrac{2}{2} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{4} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2}{n} < \dfrac{2}{1} \cdot \dfrac{2}{2} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}$. La limite de $2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}$ est nulle d'après la question précédente, donc celle de b_n est nulle d'après le théorème des gendarmes.

3. Même question pour c_n en montrant que

$$|c_n| < K \cdot \left(\frac{|a|}{n_0}\right)^{n-n_0+1}$$

où $n_0 > |a|$, et K est une constante à préciser.

$|c_n| = \frac{|a|}{1} \cdot \frac{|a|}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{|a|}{n_0 - 1} \cdot \frac{|a|}{n_0} \cdot \ldots \cdot \frac{|a|}{n} < K \cdot \left(\frac{|a|}{n_0}\right)^{n-n_0+1}$ *avec* $K = \frac{|a|}{1} \cdot \frac{|a|}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{|a|}{n_0 - 1}$. *La limite de* $K \cdot \left(\frac{|a|}{n_0}\right)^{n-n_0+1}$ *est nulle d'après la question 1., donc celle de* c_n *est nulle d'après le théorème des gendarmes.*

4. **a)** Montrer que la suite $\left(\frac{n}{n+1}\right)^p$ pour $p \in \mathbb{N}$ converge, quand $n \to +\infty$, vers une limite à préciser.

$\left(\frac{n}{n+1}\right)^p = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n+1}$ *converge vers* 1 *puisque* $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

b) Montrer alors que si $a > 1$:

$$a \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^p > K' > 1$$

à partir d'un certain rang, pour une valeur de K' à préciser.

Comme $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1$, *on a aussi* $\lim_{n \to +\infty} a \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = a$. *Si* $K' \in]1, a[$, *on en déduit* $a \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^p > K'$ *à partir d'un certain rang.*

c) En déduire que $d_{n+1} > K' d_n$ à partir d'un certain rang, et que d_n diverge.

$\frac{d_{n+1}}{d_n} = a \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^p > K'$, *donc (par récurrence)* $\frac{d_n}{d_1} > (K')^{n-1}$. *Comme* $K' > 1$, *la limite de* $(K')^{n-1}$ *est* $+\infty$ *et (compte tenu que* $d_1 = a > 0$*) la limite de* d_n *est aussi* $+\infty$.

Université de Provence — 2005-2006

Licence MI — 1ère année-S2

Deuxième session - Algèbre et Analyse élémentaire

29 JUIN 2006

Sans document ni calculette

Les quatre parties sont indépendantes

I. Soient A, B deux ensembles et $f : A \to B$ une application.

a) Montrer que, pour toute partie X de A, $X \subseteq f^{-1}(f(X))$.

b) Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes:

(1) pour toute partie X de A, $f^{-1}(f(X)) = X$;

(2) f est injective (On pourra montrer que $non(1)$ est équivalenteà $non(2)$).

II. Montrer que l' intervalle $]-1,1[$ est un groupe abélien pour la loi $\star$ définie par, pour tout $a, b \in]-1,1[$,

$$a \star b = \frac{a+b}{1+ab}$$

III. Montrer, par récurrence sur n, que , pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n}$$

b) Rappeler la définition de " $\mathbb{R}$ est archimédien" et celle de "la suite v_n converge vers $l \in \mathbb{R}$". En déduire que la suite $v_n = \frac{1}{2^n}$ converge vers 0.

c) Montrer, en utilisant la définition de la convergence, que la suite $u_n = \frac{n^2-1}{2n^2+3}$ est convergente.

IV. Sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \quad \text{si} \quad x \leq x' \quad \text{et} \quad y \leq y'.$$

a) Est-ce une relation d'équivalence?

b) Est-ce une relation d'ordre?

c) Soient les ensembles

$A = \{(1,1),(2,3),(2,4),(4,5),(5,2)\}$,

$B = \{(2,1),(1,3),(5,2),(1,5),(5,6)\}$.

Déterminer les majorants et minorants et, s"il y alieu, la borne supérieure, la borne inférieure le plus grand et le plus petit élément de A et de B.

Université de Provence	Licence de Mathématiques et Informatique Première année

Première session

Algèbre et analyse élémentaires

Durée: deux heures. Sans documents ni calculettes.

2006-2007 — 11 janvier 2007

Les trois exercices sont indépendants

Exercice 1

Soit $\mathcal{P}(f)$ la proposition :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \qquad \mathcal{Q}(f,x,y)$$

où $\mathcal{Q}(f,x,y)$ est l'implication :

$$x \leqslant y \ \Rightarrow f(x) \geqslant f(y).$$

1. Donner, si cela est possible, une fonction f telle que la proposition $\mathcal{P}(f)$ soit vraie.
2. Ecrire la négation de la proposition $\mathcal{P}(f)$.
3. Donner, si cela est possible, une fonction g telle que la négation de la proposition $\mathcal{P}(g)$ soit vraie.
4. Ecrire l'implication réciproque de l'implication $\mathcal{Q}(f,x,y)$.
5. Ecrire la contraposée de l'implication $\mathcal{Q}(f,x,y)$.

Exercice 2

Soit $(G,*)$ un groupe. On note e son élément neutre et x^{-1} l'inverse de tout $x \in G$.

1. Déterminer (en le justifiant) l'inverse $(x*y)^{-1}$ de $x*y$ en fonction de x^{-1} et de y^{-1}.
2. Soit H un sous-groupe de G. On considère sur G la relation : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x*y^{-1} \in H$.
   (a) Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
   (b) Déterminer la classe de e.
3. Soit a un élément de G fixé et soit $\phi : G \to G$ définie par : $\phi(x) = a*x*a^{-1}$.
   (a) Montrer que ϕ est un homomorphisme de groupes.
   (b) Etudier son noyau et en déduire que ϕ est injectif.
   (c) Montrer que $H' = \{x \in G \mid \exists h \in H,\ x = a*h*a^{-1}\}$ est un sous-groupe de G.

Exercice 3

Soit A un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$ et soit $sup(A)$ sa borne supérieure.

1. (a) Ecrire pour tout $\varepsilon > 0$ que $(sup(A) - \varepsilon)$ n'est pas un majorant de A.
   (b) En prenant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon = \frac{1}{n}$, en déduire qu'on peut trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in A$ et telle que x_n converge vers $sup(A)$.
2. On suppose que $A \subset \mathbb{R}^+$ (et $A \neq \{0\}$) et on définit : $B = \{x^2 / \ x \in A\}$.
   (a) Montrer que B est majoré.
   (b) Montrer que $sup(B) = (sup(A))^2$.