Licence de mathématiques-L1	Année 2007-2008

Algèbre et analyse élémentaires

Corrigé de la feuille 4

Propriétés de $\mathbb{R}$, borne supérieure, partie entière

Exercice 1. Redémontrer l'inégalité triangulaire :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \big||x|-|y|\big| \leq |x-y| \leq |x|+|y|.$$

On sait que deux nombres $a, b \in \mathbb{R}^+$ vérifient l'inégalité $a \leq b$ si et seulement si $a^2 \leq b^2$. Les inégalités à démontrer sont donc équivalentes à

$$\left(\big||x|-|y|\big|\right)^2 \leq (|x-y|)^2 \leq (|x|+|y|)^2 .$$

Développons ces carrés, compte tenu que tout nombre réel a même carré que sa valeur absolue, les inégalités à démontrer sont

$$x^2 - 2|x||y| + y^2 \leq x^2 - 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x||y| + y^2$$

et après simplification

$$-2|x||y| \leq -2xy \leq 2|x||y|.$$

Cependant $2|x||y|$ est égal à $|2xy|$ et aussi à $|-2xy|$. On a donc à démontrer

$$-|-2xy| \leq -2xy \leq |-2xy|.$$

Or ces inégalités sont exactes puisque, en posant $r = -2xy$, elles s'écrivent

$$-|r| \leq r \leq |r|$$

(tout nombre réel est compris entre l'opposé de sa valeur absolue et sa valeur absolue).

Exercice 2. Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. On suppose B borné et $A \subset B$.

1. Montrer que A est borné.

Comme les éléments de A appartiennent à B, ils sont compris entre les deux bornes de B.

2. Montrer que $\sup(A) \leq \sup(B)$ **et** $\inf(A) \geq \inf(B)$ **.**

Comme $\sup(B)$ *majore les éléments de* B*, c'est un majorant de* A*. Comme* $\sup(A)$ *est le plus petit des majorants de* A*, il est plus petit que* $\sup(B)$*.*

Comme $\inf(B)$ *minore les éléments de* B*, c'est un minorant de* A*. Comme* $\inf(A)$ *est le plus grand des majorants de* A*, il est plus grand que* $\inf(B)$*.*

Exercice 3. Soient A **et** B **deux parties de** $\mathbb{R}$**. On note** $A + B := \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$ **et** $AB := \{ab \mid a \in A,\ b \in B\}$**. On suppose que** A **et** B **sont bornés.**

1. Montrer que $A + B$ **est borné et que** $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$ **et** $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$**.**

$\sup(A) + \sup(B)$ *est majorant de* $A + B$ *(il majore les* $a + b$ *pour* $a \in A$ *et* $b \in B$*). Donc* $\sup(A+B)$ *(le plus petit des majorants) est* $\leq \sup(A)+\sup(B)$*.*

On procède de même pour l'inégalité en sens inverse, mais en se servant d'un élément fixé $b \in B$ *:*

tout $a \in A$ *vérifie* $a + b \leq \sup(A + B)$ *donc* $a \leq \sup(A + B) - b$*, c'est à dire* $\sup(A+B) - b$ *est majorant de* A*, d'où* $\sup(A) \leq \sup(A+B) - b$*. Puis : cette inégalité équivaut à* $b \leq \sup(A + B) - \sup(A)$*, donc* $\sup(A + B) - \sup(A)$ *est majorant de* B*, ce qui prouve que* $\sup(B) \leq \sup(A + B) - \sup(A)$ *c'est à dire* $\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(A + B)$*. On a bien l'inégalité dans les deux sens, d'où* $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$*. Faire de même pour l'*$\inf$*.*

2. Montrer que AB **est borné ;**

A *est inclus dans un intervalle* $[-M, M]$ *et* B *dans un intervalle* $[-M', M]$ *;* AB *est donc inclus dans* $[-MM', MM']$*.*

(a) si $A \subset \mathbb{R}^+$ **et** $B \subset \mathbb{R}^+$ **montrer alors que** $\sup(AB) = \sup(A) \times \sup(B)$ **;**

La démonstration se calque sur celle de la question 1. En multipliant l'inégalité (de nombres positifs) $a \leq \sup(A)$ *par* $b \leq \sup(B)$ *on obtient* $ab \leq \sup(A)\sup(B)$*, d'où* $\sup(A)\sup(B)$ *est un majorant de* AB*, et* $\sup(AB) \leq \sup(A)\sup(B)$*. Puis on fixe l'élément* $b \in B$ *; on le suppose non nul : si* B *n'avait que l'élément nul, l'égalité à démontrer serait évidente. On a* $ab \leq \sup(AB)$ *donc* $a \leq \dfrac{\sup(AB)}{b}$ *et* $\dfrac{\sup(AB)}{b}$ *est majorant de* A*, ce qui fait* $\sup(A) \leq \dfrac{\sup(AB)}{b}$*, puis* $b \leq \dfrac{\sup(AB)}{\sup(A)}$*, puis* $\dfrac{\sup(AB)}{\sup(A)}$ *est majorant de* B *donc* $\sup(B) \leq \dfrac{\sup(AB)}{\sup(A)}$ *et* $\sup(A)\sup(B) \leq \sup(AB)$*.*

(b) si $A = [-1, +1]$ et $B = [-3, +1]$, déterminer $\sup(AB)$.

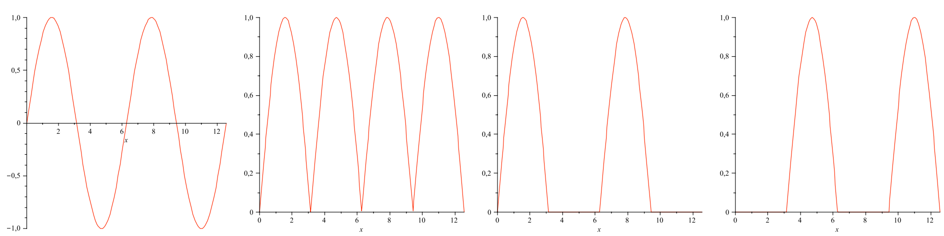
C'est 3.

Exercice 4. Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}$.
– On pose $C = \{1 - a \mid a \in A\}$, montrer que $\sup(C) = 1 - \inf(A)$.
– Soit $D = \{|x - y| \mid x, y \in A\}$, montrer que D est borné et trouver sa borne supérieure.

D'après l'exercice précédent, $\sup(C) = \sup(\{1\}) + \sup(-A)$*. Mais* $\sup(-A)$ *(c'est à dire la borne supérieure de l'ensemble des $-a$ pour $a \in A$) est évidemment* $-\inf(A)$*.*

La borne supérieure de D est $\sup(A) - \inf(A)$*.*

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On définit les fonctions :
– $|f|$ par $|f|(x) = |f(x)|$ pour tout réel x ;
– f^+ par $f^+(x) = \sup(f(x), 0)$ pour tout réel x ;
– f^- par $f^-(x) = \sup(-f(x), 0)$ pour tout réel x.
1. Soit $f(x) = \sin x$; dessiner les graphes de $f, |f|, f^+, f^-$.



2. Pour f quelconque, montrer que $|f| = f^+ + f^-$ et $f = f^+ - f^-$.

Si $f(x) \geq 0$ alors $|f|(x)$ vaut $f(x)$ c'est à dire $f^+(x)$, et $f^-(x)$ est nul. Si $f(x) \leq 0$ alors $|f|(x)$ vaut $-f(x)$ c'est à dire $f^-(x)$, et $f^+(x)$ est nul. Donc dans les deux cas $|f|(x)$ est la somme de $f^+(x)$ et $f^-(x)$, tandis que $f(x)$ est leur différence.

3. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $\sup(f, g)$ la fonction définie pour tout x par $\sup(f, g)(x) = \sup(f(x), g(x))$. Déterminer $\sup(f, g)$ en fonction de f, g et de leurs valeurs absolues. Faire de même pour la fonction $\inf(f, g)$.

Remarquons d'abord que, en conséquence des formules de la question 2, $\sup(f, 0) = f^+ = \dfrac{f + |f|}{2}$*. En appliquant à $f - g$ cette formule et en la* *translatant de g on obtient*

$$\begin{aligned}\sup(f,g) &= \sup(f-g,0)+g\\ &= \frac{f-g+|f-g|}{2}+g\\ &= \frac{f+g+|f-g|}{2}.\end{aligned}$$

D'autre part

$$\inf(f,g) = -\sup(-f,-g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}.$$

Exercice 6. Déterminer les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants :
- $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ **;**
- $B = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$**.**

C'est $1, 0, \frac{3}{2}$ *et* -1.

Exercice 7. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application croissante. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$ (x est un point fixe pour f). Indication : on pourra introduire $A = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geq x\}$.

Soit x_0 la borne supérieure de A. Si $f(x_0) > x_0$, on pose $\varepsilon = f(x_0) - x_0$, on a pour tout $x \in]x_0, x_0+\varepsilon]$

$$f(x) \geq f(x_0) = x_0 + \varepsilon \geq x$$

donc x appartient à A. Ça contredit $x > x_0 = \sup(A)$, il est donc impossible que $f(x_0) > x_0$.
Si $f(x_0) < x_0$ alors on pose $\varepsilon = x_0 - f(x_0)$ et pour $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0]$ on a

$$f(x) \leq f(x_0) = x_0 - \varepsilon < x$$

ce qui fait que ces x n'appartiennent pas à A et par conséquent $x_0 - \varepsilon$ est majorant de A. Ça contredit $x_0 = \sup(A)$ et il est donc impossible que $f(x_0) > x_0$. Il reste une possibilité, c'est $f(x_0) = x_0$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x - E(x)$.
Rappel : $E(x) \in \mathbb{Z}$ et $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

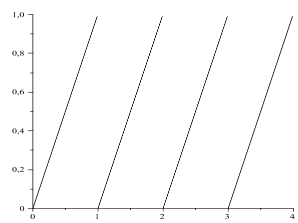
1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq f(x) < 1$.

C'est une conséquence de $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

2. Montrer que la fonction f est périodique de période 1.

Comme $E(x) + 1 \leq x + 1 \leq E(x) + 1 + 1$, *on a* $E(x+1) = E(x) + 1$ *et par conséquent* $f(x+1) = f(x)$.

3. Dessiner le graphe de f.



Exercice 9. Démontrer la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ E\left(\frac{x}{2}\right) + E\left(\frac{x+1}{2}\right) = E(x).$$

On a $E\left(\frac{x}{2}\right) \leq \frac{x}{2} < E\left(\frac{x}{2}\right) + 1$ *par conséquent on a*
soit $E\left(\frac{x}{2}\right) \leq \frac{x}{2} < E\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}$ *soit* $E\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} < E\left(\frac{x}{2}\right) + 1$. *La partie entière de x est* $2E\left(\frac{x}{2}\right)$ *dans le premier cas et* $2E\left(\frac{x}{2}\right) + 1$ *dans le second. Mais* $E\left(\frac{x+1}{2}\right)$ *est égal à* $E\left(\frac{x}{2}\right)$ *dans le premier cas et à* $E\left(\frac{x}{2}\right) + 1$ *dans le second, on a donc bien* $E\left(\frac{x}{2}\right) + E\left(\frac{x+1}{2}\right) = E(x)$.

La structure de corps

Exercice 10. On considère le sous-ensemble $A = \left\{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\right\}$ de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il s'agit d'un sous-corps du corps des réels $(\mathbb{R}, +, \times)$.
Peut-on généraliser ?

D'après l'énoncé on se place dans le corps des réels, c'est à dire on suppose connu que l'addition et la multiplication sont des lois internes dans $\mathbb{R}$, *associatives, ont des éléments neutres* 0 *et* 1*, ont des éléments symétriques (sauf* 0 *qui n'a pas de symétrique pour la multiplication), que l'addition est commutative et la multiplication distributive (*$x(y+z) = xy + xz$ *et* $(y+z)x = yx + zx$*).*

Il faut démontrer que le sous-ensemble A *vérifie aussi ces conditions. Les seuls points à vérifier sont :*

- *que l'addition et la multiplication sont des lois internes dans* A *: si on fait la somme ou le produit de* $x + y\sqrt{2}$ *par* $x' + y'\sqrt{2}$ *on obtient une expression de la même forme, c'est à dire on obtient des éléments de* A*.*

Vérification pour le produit : $(x + y\sqrt{2})(x' + y'\sqrt{2}) = xx' + xy'\sqrt{2} + x'y\sqrt{2} + 2yy'$ $= x'' + y''\sqrt{2}$ *avec* $x'' = xx' + 2yy' \in \mathbb{Q}$ *et* $y'' = xy' + x'y \in \mathbb{Q}$*.*

- *que les éléments neutres appartiennent à* A *:* $0 \in A$ *parce que* $0 = 0 + 0\sqrt{2}$ *et* $1 \in A$ *parce que* $1 = 1 + 0\sqrt{2}$*.*
- *que les symétriques appartiennent à* A *:* $-(x + y\sqrt{2}) \in A$ *parce que c'est égal à* $(-x) + (-y)\sqrt{2}$ *et* $\frac{1}{x + y\sqrt{2}} \in A$ *parce que c'est égal à*

$$\frac{x}{x^2 - 2y^2} + \frac{-y}{x^2 - 2y^2}\sqrt{2}$$

(remarquons que $x^2 - 2y^2$ *ne s'annule pas pour* $x, y \in \mathbb{Q}$*).*

Donc A *est sous-corps de* $(\mathbb{R}, +, \times)$*.*

$\left\{x_0 + x_1\alpha + \cdots + x_{n-1}\alpha^{n-1} \mid x_0, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{Q}\right\}$ *est un sous-corps de* $(\mathbb{R}, +, \times)$ *si* α *est racine d'un polynôme de degré* n *à coefficients dans* $\mathbb{Q}$*.*

Suites et limites

Exercice 11. Écrire à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes :
- **la suite $(u_n)_n$ est bornée à partir d'un certain rang ;**
- **la suite $(u_n)_n$ ne converge pas vers $\ell \in \mathbb{R}$;**
- **la suite $(u_n)_n$ n'est pas convergente.**

- $\exists M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n| \leq M$ *;*
- $\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ |u_n - \ell| \geq \varepsilon$ *;*
- $\forall \ell \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ |u_n - \ell| \geq \varepsilon$*.*

Exercice 12. On considère la suite $u_n = (-1)^{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$.

Donner un exemple explicite de sous-suite de la suite $(u_n)_n$ convergeant vers -1, un exemple de sous-suite convergeant vers 1, un exemple de suite extraite alternée.

Étudions le signe de $(-1)^{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}}$, *c'est à dire la parité de* $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$:
$\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ *est forcément divisible par* 3, *parce que* $n, n+1$ *ou* $n+2$ *l'est.* *Il est divisible par* 2 *parce que* n *ou* $n+1$ *est pair. Donc* $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ *est entier ; de plus* $n+2$ *est pair si* n *l'est, ce qui fait que* $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ *est pair si* n *l'est ; par contre si* n *est impair,* $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ *a même parité que* $\dfrac{n+1}{2}$.
On en déduit que $(u_{4k+1})_k$ *converge vers* -1 *et* $(u_{2k})_k$ *vers* 1 ; $(u_{2k+1})_k$ *est alternée.*

Exercice 13. Étudier la convergence des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{3n^2+6}{n^2+1}$

2. $v_n = \dfrac{n+1}{n}(-1)^n$

3. $w_n = \dfrac{a^n}{n^p}$, $a > 0$

4. $a_n = \dfrac{1}{E\left(n\sqrt{2}\right)}$.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2+6}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3+\frac{6}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3+0}{1+0} = 3.$

2. $(v_n)_n$ *diverge parce que* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{2n} = 1$ *est différent de* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+2}{2n+1}(-1) = -1.$

3. En utilisant la formule $x^y = e^{y\ln x}$ *valable pour* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ *on a* $w_n = e^{n\ln a - p\ln n} = e^{n\left(\ln a - p\frac{\ln n}{n}\right)}$. *Sachant que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$ *on en déduit* $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \begin{cases} +\infty & si\ a > 1 \\ 0 & si\ a < 1. \end{cases}$

Reste le cas $a = 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^p} = \begin{cases} 0 & si\ p > 0 \\ 1 & si\ p = 0 \\ +\infty & si\ p < 0. \end{cases}$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ *parce que* $n\sqrt{2} < E\left(n\sqrt{2}\right) + 1 \Rightarrow n\sqrt{2} - 1 < E\left(n\sqrt{2}\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \left(E\left(n\sqrt{2}\right)\right) = +\infty.$

Exercice 14. Soit $(u_n)_n$ une suite de réels et soient $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ deux suites extraites définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. On suppose que $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $(u_n)_n$ converge vers ℓ.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N$, on ait $|v_n - \ell| < \varepsilon$ et il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N'$, on ait $|w_n - \ell| < \varepsilon$. Donc pour $n \geq \max(N, N')$ on a les deux inégalités. Pour $n \geq 2\max(N, N') + 1$ on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$, parce que $u_n = v_{\frac{n}{2}}$ ou $w_{\frac{n-1}{2}}$ et $\dfrac{n-1}{2} \geq \max(N, N')$.

Exercice 15. Étudier la convergence de la suite définie par : $u_{n+1} = 3u_n + 2$ $(n \geq 0)$ et $u_0 = 2$.

$u_n > 2^n$ se démontre par récurrence : on a $u_0 = 2 > 2^0 = 1$ et, si $u_n > 2^n$, alors $u_{n+1} = 3u_n + 2 \geq 3 \cdot 2^n + 2 \geq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. Il s'ensuit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 16. Montrer que toute suite $(u_n)_n$ avec $u_0 > 0$ et vérifiant pour tout $n \geq 1$

$$u_n \geq u_0 + \cdots + u_{n-1}$$

est divergente.

$u_n > nu_0$ se démontre par récurrence : on a $u_0 > 0u_0 = 0$, $u_1 \geq u_0 = 1u_0$ et, si $u_n > nu_0$ avec $n \geq 1$, alors $u_{n+1} \geq u_0 + u_n > u_0 + nu_0 = (n+1)u_0$. Il s'ensuit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 17. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ les suites définies par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$. Montrer que ces deux suites convergent vers la même limite. Cette limite est-elle rationnelle ?

u_n est inférieur à la somme géométrique $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$ qui converge vers 4. Comme de plus $(u_n)_n$ est croissante, elle admet une limite $\ell \leq 4$. Et $(v_n)_n$ converge vers la même limite (leur différence tend vers 0). Elle ne peut pas être égale à un nombre rationnel $\dfrac{p}{q}$: si c'était le cas on aurait pour $n \geq q$ (après avoir vérifié que $(u_n)_n$ est strictement croissante et $(v_n)_n$ strictement décroissante)

$$u_n < \frac{p}{q} < v_n \Rightarrow n!u_n \leq (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (q-1) \cdot (q+1) \cdot \cdots \cdot n) \cdot p < n!v_n = n!u_n + 1.$$

Or ces inégalités ne peuvent être vérifiées : un entier ne peut pas être strictement compris entre deux entiers consécutifs.

Exercice 18. On pose

$$x_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+2)} \ .$$

Montrer que la suite $(x_n)_n$ tend vers $\frac{3}{4}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Évidemment puisque $\frac{1}{p(p+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{p} - \frac{\frac{1}{2}}{p+2}$ *et, dans* $\sum_{p=1}^{n} \frac{\frac{1}{2}}{p} - \sum_{p=1}^{n} \frac{\frac{1}{2}}{p+2}$ *, tous les termes s'éliminent sauf les deux premiers qui valent* $\frac{1}{2}$ *et* $\frac{1}{4}$ *et les deux derniers qui tendent vers* 0.

Exercice 19. Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$, on considère la suite $S_n = \sum_{i=0}^{n} a^i$.

1. Calculer S_n .

$S_n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ *si* $a \neq 1$, *et* $S_n = n+1$ *si* $a = 1$.

2. En déduire les valeurs de a pour lesquelles $(S_n)_n$ est convergente ainsi que la valeur de l'éventuelle limite.

$(S_n)_n$ *converge vers* $\frac{1}{1-a}$ *si* $a \in]-1, 1[$, *diverge sinon.*

Exercice 20. Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, la suite $(S_l)_l$ définie par

$$S_l = \sum_{k=0}^{l} E\left(\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right)$$

converge vers n quand l tend vers $+\infty$. Indication : utiliser la relation de l'exercice 9.

$E\left(\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right)$ *c'est* $E\left(\frac{x+1}{2}\right)$ *avec* $x = \frac{n}{2^k}$ *; d'après l'exercice 9, c'est* $E(x) - E\left(\frac{x}{2}\right)$. *On a donc*

$$S_l = \sum_{k=0}^{l} \left(E\left(\frac{n}{2^k}\right) - E\left(\frac{n}{2^{k+1}}\right)\right) .$$

Mais cette somme de différences se simplifie : c'est $E(n) - E\left(\frac{n}{2^{l+1}}\right)$, *ce qui fait* $E(n)$ *c'est à dire* n *si* l *est assez grand.*