| Licence de mathématiques-L1 | Année 2007-2008 |
|---|---|

## Algèbre et analyse élémentaires

## Corrigé du sujet

### Exercice 1

**1. Condition pour que $f$ soit un homomorphisme de $(G, *)$ dans $(H, \otimes)$ :** *(sur 1 pt)*

$$\forall x, y \in G,\ f(x * y) = f(x) \otimes f(y). \tag{1}$$

**2. Montrer que si $f$ est un isomomorphisme de groupes alors $f^{-1}$ est un homomorphisme de groupes.** *(sur 2 pts)*

*Il s'agit de démontrer que*

$$f^{-1}(x \otimes y) = f^{-1}(x) * f^{-1}(y). \tag{2}$$

*Démontrons d'abord que*

$$f\big(f^{-1}(x \otimes y)\big) = f\big(f^{-1}(x) * f^{-1}(y)\big). \tag{3}$$

*Cette égalité équivaut à $x \otimes y = f\big(f^{-1}(x) * f^{-1}(y)\big)$, or celle ci est vraie d'après (1) : il suffit de remplacer $x$ par $f^{-1}(x)$ et $y$ par $f^{-1}(y)$ dans (1) et c'est bien ce qu'on obtient.*
*Compte tenu que $f$ est injective, (2) se déduit de (3).*

**3. Si $f$ est un homomorphisme de groupes, montrer que $\ker(f)$ est un sous-groupe de $G$.** *(sur 1,5 pt)*

- $\ker(f)$ *est inclus dans $G$, puisqu'il est l'ensemble des $x \in G$ tels que $f(x) = e'$.*
- *La loi $*$ est interne dans $\ker(f)$ parce que quelque soient les éléments $x$ et $y$ de $\ker(f)$, on a $f(x*y) = f(x) \otimes f(y) = e' \otimes e' = e'$ ce qui fait $x*y \in \ker(f)$.*
- *L'élément neutre $e$ appartient à $\ker(f)$ parce que d'après le cours, $f(e) = e'$.*
- *Le symétrique de $x$ (noté $x^{-1}$) appartient à $\ker(f)$ parce que d'après le cours, $f\big(x^{-1}\big) = \big(f(x)\big)^{-1}$ et, si $x \in \ker(f)$, $\big(f(x)\big)^{-1} = (e')^{-1} = e'$.*

*Donc $\ker(f)$ est un sous-groupe de $G$.*

## Exercice 2

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \frac{x}{y} \textbf{ est le carré d'un entier}.$$

**1. Écrire à l'aide de quantificateurs la proposition « $\frac{x}{y}$ est le carré d'un entier » :** *(sur 1 pt)*

$\exists n \in \mathbb{Z},\ \frac{x}{y} = n^2.$

**2. Propriétés de la relation $\mathcal{R}$ :** *(sur $2,5$ pts)*

• *Réflexivité : $x\mathcal{R}x$ parce que $\frac{x}{x} = 1$ est le carré de l'entier $1$.*

• *Symétrie : c'est pas symétrique, $\frac{100}{4}$ par exemple est le carré d'un entier mais $\frac{4}{100}$ ne l'est pas.*

• *Antisymétrie : si $\exists n \in \mathbb{Z},\ \frac{x}{y} = n^2$ et $\exists n' \in \mathbb{Z},\ \frac{y}{x} = n'^2$ alors en faisant le produit on obtient $\frac{x}{y}\frac{y}{x} = n^2n'^2$ c'est à dire $1 = n^2n'^2$, ce qui (pour les entiers positifs $n^2$ et $n'^2$) n'est possible que si $n^2 = n'^2 = 1$, d'où $x = y$.*

• *Transitivité : si $\exists n \in \mathbb{Z},\ \frac{x}{y} = n^2$ et $\exists n' \in \mathbb{Z},\ \frac{y}{z} = n'^2$ alors en faisant le produit on obtient $\frac{x}{y}\frac{y}{z} = n^2n'^2$ c'est à dire $\frac{x}{z} = (nn')^2$, ce qui fait $x\mathcal{R}z$.*

*On a prouvé que $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'équivalence mais une relation d'ordre.*

**3. Trouver les ensembles $\{n \in \mathbb{N}^* \mid 1\mathcal{R}n\}$ et $\{n \in \mathbb{N}^* \mid n\mathcal{R}1\}$.** *(sur 2 pts)*

*Le premier ensemble n'a qu'un seul élément qui est le nombre $1$, parce que $\frac{1}{n}$ ne peut pas être entier si $n \geq 2$.*
*Le second ensemble est l'ensemble des carrés.*

## Exercice 3

*(sur 3,5 pts)*

**1. La loi $*$ définie sur $\mathbb{R}$ par $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$**

• *est une loi interne puisque $\sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$ ;*

• *elle est associative : $(x * y) * z = \sqrt{(x * y)^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ est égal à $x * (y * z) = \sqrt{x^2 + (y * z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ;*

• *elle admet cependant pas d'élément neutre : il ne peut pas exister de réel* $e$ *tel que* $x * e$ *(qui est positif) soit égal à* $x$ *(pour tout* $x$ *donc aussi pour les* $x$ *strictement négatifs).*

*Ce n'est donc pas une loi de groupe.*

**2. La loi $\top$ définie sur $\mathbb{R}$ par $x \top y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$**

• *est une loi interne puisque* $\sqrt{x^3 + y^3} \in \mathbb{R}$ *;*

• *elle est associative :* $(x \top y) \top z = \sqrt{(x \top y)^3 + z^3} = \sqrt{x^3 + y^3 + z^3}$ *est égal à* $x \top (y \top z) = \sqrt{x^3 + (y \top z)^3} = \sqrt{x^3 + y^3 + z^3}$ *;*

• $0$ *est élément neutre ;*

• $-x$ *est symétrique de* $x$ *puisque* $x \top (-x) = (-x) \top x = \sqrt{x^3 + (-x)^3} = \sqrt{x^3 - x^3} = 0$.

*C'est donc une loi de groupe.*

## Exercice 4

**Soit $f : X \to Y$. On note $F$ l'application de $\mathcal{P}(X)$ (ensemble des parties de $X$) dans $\mathcal{P}(Y)$ (ensemble des parties de $Y$) qui associe à toute partie de $X$ son image par $f$.**

**1. Rappeler la définition de $f(A)$ et celle de $f^{-1}(B)$.** *(sur* $1$ *pt)*

$f(A)$ *est l'ensemble des* $f(x)$ *pour* $x \in A$.

$f^{-1}(B)$ *est l'ensemble des* $x \in X$ *tels que* $f(x) \in B$.

**2. (a) Montrer que si $f$ est injective, alors $F(A) \subset F(A') \Rightarrow A \subset A'$.** *(sur* $1,5$ *pt)*

*Il s'agit de démontrer que tous les éléments* $a$ *de* $A$ *appartiennent à* $A'$. *On peut d'abord dire que* $f(a)$ *appartient à* $F(A)$ *donc à* $F(A')$, *et de ce fait il est l'image d'un élément de* $A'$ *:* $f(a) = f(a')$ *avec* $a' \in A'$. *Mais alors* $a = a'$ *puisque* $f$ *est injective. On a prouvé que* $a$ *appartient à* $A'$, *c'est à dire* $A \subset A'$.

**(b) En déduire que $f$ injective $\Rightarrow$ $F$ injective.**

$$\begin{aligned} F(A) = F(A') &\Rightarrow \begin{cases} F(A) \subset F(A') \\ F(A') \subset F(A) \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} A \subset A' \\ A' \subset A \end{cases} \quad \textit{(d'après la question précédente)} \\ &\Rightarrow A = A'. \end{aligned}$$

**(c) i. Justifier pour $x \in X$ l'équation $F(\{x\}) = \{f(x)\}$.** *(sur $0,5$ pt)*

*Limage par $F$ de l'ensemble $\{x\}$ a un seul élément, c'est $f(x)$. Cette image est donc l'ensemble $\{f(x)\}$.*

**ii. Montrer que $F$ injective $\Rightarrow f$ injective.** *(sur 1 pt)*

$$\begin{array}{lll} f(x) = f(x') & \Rightarrow & \{f(x)\} = \{f(x')\} \\ & & F(\{x\}) = F(\{x'\}) \\ & & \{x\} = \{x'\} \quad \textit{(si } F \textit{ est injective)} \\ & & x = x'. \end{array}$$

**3. On suppose que $f$ est surjective.**
**(a) Montrer que $f(f^{-1}(B)) = B$.** *(sur 1 pt)*

*Les éléments de $f(f^{-1}(B))$ sont images d'éléments de $f^{-1}(B)$ ; ils sont donc images d'éléments dont l'image appartient à $B$, c'est à dire ils appartiennent à $B$.*

*Réciproquement, les éléments de $B$ sont images d'éléments de $X$ (puisque $f$ est surjective). Ces éléments de $X$ appartiennent à $f^{-1}(B)$ (puisque leurs images appartiennent à $B$), donc finalement les éléments de $B$ appartiennent à $f(f^{-1}(B))$.*

**(b) En déduire que $F$ est surjective.** *(sur 1 pt)*

*D'après la question précédente, tout $B \in \mathcal{P}(Y)$ admet un antécédent par $F$ (cet antécédent est $f^{-1}(B)$).*

**4. Montrer que $F$ surjective $\Rightarrow f$ surjective.** *(sur 1 pt)*

*Il faut trouver un antécédent pour chaque élément $y$ de $Y$. L'ensemble $\{y\}$ a un antécédent par $F$, qu'on appelle $A$. L'ensemble $A$ n'est pas vide puisque son image par $f$ contient un élément, qui est $y$. On peut donc se servir d'un élément $a \in A$. Son image $f(a)$ appartient à $F(A)$, qui est $\{y\}$, donc $f(a) = y$, et $a$ est antécédent de $y$ par $f$.*