Algèbre et analyse élémentaires

FEUILLE D'EXERCICES N° 1

LOGIQUE, THÉORIE DES ENSEMBLES

I. Un peu de logique

Exercice 1 *Questions de logique*

1. Tous les Poldaves sont bruns et tous les Syldaves sont blonds.
 - (a) Quelle caractéristique vous permet d'affirmer que quelqu'un n'est pas Poldave?
 - (b) Que peut-on dire de quelqu'un qui est roux?
2. Pour être naturalisé Syldave, il faut que soit un des parents soit Syldave, soit être né sur le sol Syldave. Vous refusera-t-on la naturalisation si
 - (a) un de vos parents n'est pas Syldave
 - (b) vous n'êtes pas né en Syldavie
 - (c) aucun de vos parents n'est Syldave
 - (d) un seul de vos parents est Syldave
 - (e) aucun de vos parents n'est Syldave et vous êtes né en Poldavie.
3. Un sous-ensemble A de nombres réels possède une borne supérieure : cela entraîne-t-il que :
 - (a) Pour tout nombre pris dans A il existe un nombre réel plus grand que ce nombre?
 - (b) Il existe un nombre réel qui est tel que tous les nombres pris dans A soient plus petits que ce nombre?
4. Pensez vous que cette loi de Physique soit vraie ou fausse :
"Plus un corps tombe moins vite, moins sa vitesse est plus grande".

Exercice 2 *Manipulation des connecteurs logiques*

1. Construire la table de vérité des connecteurs binaires (i.e. : 'et', 'ou', $\Rightarrow$ ('implique'), $\Leftrightarrow$ ('équivalent à')). Faire de même pour le symbole unaire de négation 'non'.
2. Soient F, F', F'' trois formules (ou propositions). Montrer que :
 - (a) $F \Rightarrow F' \equiv \text{non } F' \Rightarrow \text{non } F$.
 - (b) $[F \text{ et } F' \Rightarrow (F'' \text{ et } (\text{non } F''))] \equiv F \Rightarrow \text{non } F'$.
(raisonnement par l'absurde)
3. Parmi ces assertions, lesquelles sont toujours vraies ou toujours fausses ou ni toujours vraies ni toujours fausses :
 - $[P \text{ ou } (Q \text{ et } R)] \text{ et } (Q \text{ ou } R)$;
 - $[P \text{ ou } (\text{non } P \text{ et } Q)] \Leftrightarrow (P \text{ ou } Q)$;
 - $(\text{non } P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)$.

Exercice 3 Quelques propriétés des opérations logiques

Soient P , Q et R trois propositions, montrer que :

- $\text{non}(\text{non } P) \Leftrightarrow P$
- $(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ou } P)$
- $[P \text{ et } (Q \text{ ou } R)] \Leftrightarrow [(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)]$
- $[P \text{ ou } (Q \text{ et } R)] \Leftrightarrow [(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)]$
- $\text{non}(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$
- $\text{non}(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$

Exercice 4 On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des arbres de la forêt de Fontainebleau et $\mathcal{F}$ l'ensemble des feuilles de tous les arbres.

1. Traduire avec des quantificateurs les propositions suivantes et dire si elles sont vraies ou fausses (on définira éventuellement de nouveaux ensembles) :
 - Il existe un arbre et il existe une feuille qui est sur cet arbre ;
 - Tous les arbres ont des feuilles ;
 - Tous les chênes de la forêt ont des feuilles rouges en automne ;
 - Tous les arbres de la forêt ont perdu leurs feuilles en hiver.
2. Traduire en français les propositions suivantes et dire si elles sont vraies ou fausses :
 - $\forall A \in \mathcal{A}, \forall f \in \mathcal{F}, f \in A$;
 - $\forall f \in \mathcal{F}, \exists A \in \mathcal{A}$ tel que $f \in A$;
 - $\forall f \in \mathcal{F}, \exists A \in \mathcal{A}$ tel que $f \notin A$.

Exercice 5 Dire si les affirmations suivantes sont justes ou fausses : soit x un nombre réel,

- si $x = 1$ alors $e^x = e$;
- si $x < -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ alors $e^x < -\pi$;
- si $x = i + 1$ alors $e^x = 0$.

Exercice 6 Trouver la négation des propositions suivantes :

- Jean porte un béret ou une casquette ;
- Si Jean porte un couvre-chef alors il porte un béret ou une casquette ;
- Pierre porte un pull et un manteau ;
- Il fait froid donc Pierre met un pull et un manteau ;
- Toute personne qui a une maison, a, un jour, des problèmes de chauffage ;
- Dans chaque famille, où il ya un chien et des enfants jeunes, il y a toujours de l'animation et des cris.

Soit x un nombre réel,

- x appartient à $]0, 10[$ et x est un nombre pair ;
- x appartient à $]0, 10[$ ou x appartient à $]5, 6[$.

Exercice 7 Remplir avec $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, ou encore $\times$ lorsque aucune des implications n'est possible ; justifier vos choix.

- 1. $\alpha \leq \beta \dots \alpha^2 \leq \beta^2 \dots (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) \leq 0$.
- 2. $0 \leq \alpha \leq \beta \dots 0 \leq \sqrt{\alpha} \leq \sqrt{\beta} \dots \alpha \leq \beta$.
- 3. $\ln(\alpha) = \ln(\beta) \dots \alpha = \beta$.
- 4. La fonction f est croissante sur $\mathbb{R} \dots \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 8 Soient x_0 un nombre réel fixé et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ecrire, à l'aide de quantificateurs, les propositions suivantes et donner leur négation :

- Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel δ strictement positif tel que, pour tout nombre réel x vérifiant $|x - x_0| < \delta$, alors $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
- Pour tout nombre réel x et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre réel δ strictement positif tel que, pour tout nombre réel y vérifiant $|y - x| < \delta$, alors $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.
- Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel δ strictement positif tel que, pour tous nombres réels x et y vérifiant $|y - x| < \delta$, alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Les deux dernières propositions sont-elles équivalentes ?

Exercice 9 *quantificateurs universels*

- 1. A-t-on les formules :

$$\forall x, (P(x) \text{ ou } Q(x)) \equiv \forall x P(x) \text{ ou } \forall x Q(x)$$

$$\forall x, \exists y P(x, y) \equiv \exists y, \forall x P(x, y).$$

- 2. Ecrire la définition de la borne supérieure d'un sous-ensemble non vide borné de $\mathbb{R}$. Ecrire qu'un nombre a n'est pas la borne supérieure d'un ensemble A . L'ensemble vide admet-il une borne supérieure ?

II. Théorie des ensembles

Exercice 10 *symboles de théorie des ensembles*

- 1. Soient X un ensemble et A, B, C trois parties de X .
 - (a) Expliciter les formules de théorie des ensembles : $x \in A \cup B$, $x \in A \cap B$, $x \in A^c$, au moyen des connecteurs logiques et symboles élémentaires ($x \in A$, $x \in B$).
 - (b) Montrer que $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$ impliquent $B \subset C$.
- 2. On pose $A \Delta B = A \cup B \setminus (A \cap B)$. L'opération $A \Delta B$ est appelée la *différence symétrique* de A et de B .
 - (a) Montrer que $A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$ où c désigne le symbole de complément.
 - (b) Retrouver le résultat en construisant la table de vérité de $x \in A \Delta B$.

Exercice 11 *Fonction caractéristique d'un ensemble*

Soient E un ensemble et A une partie de E . On appelle fonction caractéristique (ou indicatrice) de A l'application de E dans $\{0, 1\}$ définie par :

$$f_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soient A et B deux parties de E . Exprimer $f_{A \cup B}$, $f_{A \cap B}$ et $f_{E \setminus A}$ en fonction de f_A et f_B .

Exercice 12 Opérations sur les ensembles

1. Soient E, F et G trois ensembles. Montrer les propriétés suivantes :
 - (a) $(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$
 - (b) $(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$
2. Soient A et B des parties d'un ensemble E , montrer
 - (a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
 - (b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
3. Soient A et B des parties d'un ensemble E , montrer l'équivalence des propositions suivantes :
 - (a) $A \cup B = E$
 - (b) $A^c \subset B$
 - (c) $B^c \subset A$

Exercice 13 Produit cartésien

1. Soient les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants : $I = [0, 3]$, $J = [0, 4]$, $K = [1, 4]$, $L = [1, 5]$.
Dessiner dans le plan repéré par un repère cartésien les ensembles : $I \times J$ et $K \times L$; déterminer : $(I \times J) \cap (K \times L)$.
2. Pour les ensembles quelconques A, B, C, D , déterminer (en justifiant le résultat) $(A \times B) \cap (C \times D)$.
3. Montrer en donnant un contre-exemple, que $(A \times B) \cup (C \times D)$ n'est en général pas un produit cartésien.
4. Que vaut $A \times B$ si $A = \emptyset$.
5. Résoudre l'équation : $A \times B = \emptyset$.

Exercice 14 Ensemble des parties d'un ensemble

Soit l'ensemble $A = \{a, b, c, d\}$. Déterminer $\mathcal{P}(A)$.

I. Relations binaires, relations d'équivalence

Exercice 1 Etudier les propriétés des relations binaires suivantes :

1. dans $\mathbb{R}$: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy > 0$;
2. dans $\mathbb{R}^*$: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy > 0$;
3. dans $\mathbb{Z}$: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x|y$; puis dans $\mathbb{N}$;
4. dans $\mathbb{N}$: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}^*, y = x^n)$.

Exercice 2 On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall (x', y') \in \mathbb{R}^2, (x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow \exists a > 0, \exists b > 0, x' = ax \text{ et } y' = by.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Donner la classe d'équivalence des couples $(1, 0), (0, 1), (1, 1)$.
3. Trouver toutes les classes d'équivalence et les visualiser en faisant un dessin.

Exercice 3 congruence modulo n

Soit n un entier naturel non nul. On considère la relation $\mathcal{R}_n$, définie sur $\mathbb{Z}$, par $a\mathcal{R}_nb \Leftrightarrow n|a-b$

1. Montrer que $\mathcal{R}_n$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$ appelée congruence modulo n .
2. Déterminer l'espace quotient.
3. Montrer enfin que pour tous a, b, c éléments de $\mathbb{Z}$,

$$a\mathcal{R}_nb \Leftrightarrow (a+c)\mathcal{R}_n(b+c) \quad (\mathcal{R}_n \text{ est compatible avec l'addition})$$

$$a\mathcal{R}_nb \Leftrightarrow (ac)\mathcal{R}_n(bc) \quad (\mathcal{R}_n \text{ est compatible avec la multiplication})$$

Exercice 4 On définit dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{\text{applications de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}\}$ la relation $\mathcal{R}$ suivante :

$$f\mathcal{R}g \Leftrightarrow \exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R}, (|x| > A \Rightarrow f(x) = g(x))$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 5 Soit E l'espace usuel. On fixe un point O de E et on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur l'ensemble des points de E par

$$PRP' \Leftrightarrow \text{les points } O, P \text{ et } P' \text{ sont alignés.}$$

- Est-ce une relation d'équivalence sur E ?
- On note $E^* = E \setminus \{O\}$; montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E^* . Déterminer l'ensemble quotient (dans cet exercice, l'ensemble quotient obtenu correspond à un objet fondamental en géométrie : l'espace projectif).

Exercice 6 Etant donné, dans un plan rapporté à 2 axes de coordonnées, deux points $P = (x, y)$ et $P' = (x', y')$, on note $\mathcal{R}$ la relation

$$PRP' \Leftrightarrow xy = x'y'.$$

Montrer que c'est une relation d'équivalence dans le plan et en construire les classes d'équivalence.

II. Relations d'ordre

Exercice 7 Soit E un ensemble.

1. Montrer que l'inclusion définit une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$;
2. Montrer que toute paire $\{X, Y\}$ d'éléments de $\mathcal{P}(E)$ admet une borne supérieure et une borne inférieure pour cet ordre. Les déterminer.

Exercice 8 Montrer que $(\mathbb{N}^*, |)$ est un ensemble ordonné (où $|$ est le symbole de divisibilité : $a|b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* b = ka$). Est-il totalement ordonné?

Soit $A = \{6, 21, 15\}$, y-a-t'il un plus grand élément dans A , un plus petit élément? Même question avec $A = \{2, 8, 10\}$ et $A = \{2, 6, 12\}$.

Exercice 9 *ordre lexicographique sur un produit cartésien*

$(A, \leq_1)$ et $(B, \leq_2)$ sont deux ensembles non vides ordonnés. On définit sur l'ensemble $A \times B$ la relation $\leq_{lex}$ par :

$$(a, b) \leq_{lex} (a', b') \Leftrightarrow ((a \neq a' \text{ et } a \leq_1 a') \text{ ou } (a = a' \text{ et } b \leq_2 b')).$$

1. Montrer que cette relation est un ordre sur $A \times B$.
2. Si $A = B = \mathbb{N}$, et $\leq_1 = \leq_2 = \leq$, dessiner tous les éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ inférieurs à l'élément $(2, 4)$.
3. Si $\leq_1$ et $\leq_2$ sont totaux, peut-on affirmer que $\leq_{lex}$ l'est?

Exercice 10 *ordre produit sur un produit cartésien*

$(A, \leq_1)$ et $(B, \leq_2)$ sont deux ensembles non vides ordonnés. On définit sur l'ensemble $A \times B$ la relation $\leq_{pro}$ par :

$$(a, b) \leq_{pro} (a', b') \iff (a \leq_1 a' \text{ et } b \leq_2 b').$$

1. Montrer que cette relation est un ordre sur $A \times B$.
2. Si $A = B = \mathbb{N}$, et $\leq_1 = \leq_2 = \leq$, dessiner tous les éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ inférieurs à l'élément $(2, 4)$.
3. Si $\leq_1$ et $\leq_2$ sont totaux, peut-on affirmer que $\leq_{pro}$ l'est ?

Exercice 11 On munit $\mathbb{R}^2$ de l'ordre produit associé à l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$ (cf exercice précédent).

On note $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1. A admet-elle une borne inférieure dans $\mathbb{R}^2$? si oui, laquelle ? (on fera un dessin).
2. A admet-elle une borne supérieure dans $\mathbb{R}^2$? laquelle ?

Exercice 12 Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{N}^2$ par :

$$(x, y) \mathcal{R} (x', y') \iff x \leq y' \text{ et } y \leq y'.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?
2. Soit $A = \{(1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 5), (5, 2)\}$. Quels sont les majorants, minorants et, s'il y a lieu, borne supérieure, borne inférieure, plus grand et plus petit élément de A ?

III. Applications

Exercice 13 Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux applications. Notons $h = g \circ f$.

1. Montrer que h injective (resp. surjective) entraîne f injective (resp. g surjective).
2. Si f et g sont linéaires, montrer que h est linéaire.
3. Si f est linéaire et surjective et h est linéaire, montrer que g est linéaire.

Exercice 14 Si f est une des fonctions usuelles $\cos x$, $\sin x$, e^x , x^2 , $\sqrt{x}$ ou $\ln x$, déterminer $f^{-1}(\{y\})$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ et dire si f est injective ou surjective.

Exercice 15 Soient $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$, $h : G \rightarrow E$ trois applications ; démontrer que si parmi les trois applications $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$, $f \circ h \circ g$, deux sont injectives (resp. surjectives), la troisième étant surjective (resp. injective), alors f , g , h sont bijectives.

Exercice 16 Soit f une application de X dans Y . Montrer que f est injective si et seulement si il existe une fonction g de Y dans X telle que $g \circ f = Id_X$. La fonction g est-elle unique ?

Exercice 17 Soient quatre ensembles E, E', F, F' . Démontrer que

$$(E \times E') \cap (F \times F') = (E \cap F) \times (E' \cap F').$$

A-t-on une propriété analogue avec la réunion ?

Exercice 18 (Application "image réciproque")

Soient X, Y deux ensembles et $f : X \rightarrow Y$ une application.

1. Rappeler la définition de $f(A)$ pour une partie A de X , ainsi que la définition de $f^{-1}(A')$ pour une partie A' de Y .
2. Pour tous $(A, B) \in \mathcal{P}(X)^2$ et $(A', B') \in \mathcal{P}(Y)^2$, comparer
 - (a) $f(A \cup B)$ et $f(A) \cup f(B)$; $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$.
 - (b) $f^{-1}(A' \cup B')$ et $f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$; $f^{-1}(A' \cap B')$ et $f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.
(On pourra généraliser au cas d'une réunion ou d'une intersection quelconque de sous-ensembles.)
 - (c) $f(A^c)$ et $f(A)^c$; $f^{-1}(A'^c)$ et $f^{-1}(A')^c$.
 - (d) A et $f^{-1}(f(A))$; A' et $f(f^{-1}(A'))$.
3. Montrer que f^{-1} est une application croissante de $\mathcal{P}(Y)$ dans $\mathcal{P}(X)$.
4. Démontrer les propositions suivantes :
 - (a) $(\forall (A, B) \in \mathcal{P}(X)^2, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)) \iff f$ injective.
 - (b) $(\forall A \in \mathcal{P}(X), f^{-1}(f(A)) = A) \iff f$ injective.
 - (c) $(\forall A' \in \mathcal{P}(Y), f(f^{-1}(A')) = A') \iff f$ surjective.

Algèbre et analyse élémentaires

FEUILLE D'EXERCICES N° 3

GROUPES

I. Lois de composition internes

Exercice 1 On définit sur $\mathbb{R}^+$ la loi de composition interne $\star$ par :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, \quad x \star y = \frac{(x + y + |x - y|)}{2}$$

1. Montrer que pour tout a , on a $a \star a = a$;
2. Montrer que $\star$ est commutative, associative et admet un élément neutre;
3. Montrer que le seul élément qui admet un symétrique est 0.

Exercice 2 On définit sur $\mathbb{R}$ la loi de composition interne $\star$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \star y = a(x + y) + bxy + c$$

(a, b, c étant des réels fixés).

A quelle condition la loi est elle associative ?

Exercice 3 On définit sur $\mathbb{N}$ la loi $\star$ par :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \quad m \star n = n + m + 1.$$

Etudier les propriétés de cette opération.

Exercice 4 Etudier les lois suivantes :

1. sur $\mathbb{R}$, la loi $\star$ définie par $a \star b = \sup(a, b)$;
2. même chose que ci-dessus mais sur $\mathbb{R}^+$;
3. sur $\mathbb{R}$, la loi $\star$ définie par $a \star b = a + b + ab$.

II. Groupes

Exercice 5 Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $a \neq 0$, on définit l'application $f_{a,b} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ en posant $f_{a,b}(z) = az + b$.

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Montrer que l'application $f_{a,b}$ est bijective.

2. Soit $G = \{f_{a,b} \mid (a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}\}$. Montrer que $(G, \circ)$ muni de la composition des applications est un groupe. Ce groupe est-il commutatif?

Exercice 6 Vérifier que $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est un groupe pour la loi $\star$ définie par

$$(x, y) \star (x', y') = (xx', xy' + y).$$

Est-ce un groupe commutatif?

Exercice 7 Soit $(G, \times)$ un groupe tel que $\forall x \in G, x^2 = e$ (où e est l'élément neutre de la loi $\times$). Montrer que G est abélien.

III. Sous-groupes

Exercice 8 Soient G un groupe et H et K deux sous-groupes de G . Montrer que :

$$H \cup K = G \iff (H = G \text{ ou } K = G).$$

Exercice 9 Soit $(G, \cdot)$ un groupe. On appelle *centre* de G la partie C de G définie par :

$$C = \{x \in G \mid \forall y \in G, xy = yx\}.$$

Montrer que C est un sous-groupe de G .

Exercice 10 Soient $(G, \top)$ et $(G', \perp)$ deux groupes et $\star$ la loi-produit définie dans $G \times G'$ par :

$$(x, y) \star (x', y') = (x \top x', y \perp y').$$

1. Montrer que $(G \times G', \star)$ est un groupe.
2. Montrer que si H (respectivement H') est un sous-groupe de G (respectivement G'), alors $H \times H'$ est un sous-groupe de $G \times G'$.

IV. Morphismes de groupes

Exercice 11 Soit S^1 le cercle trigonométrique. On considère l'application $f : (\mathbb{C}^*, \times) \rightarrow (S^1, \times)$ définie par $f(z) = \frac{z}{|z|}$. Montrer que l'application f est un morphisme surjectif de groupes.

Exercice 12 Soient $(G, \top)$ et $(G', \perp)$ deux groupes et $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes.

1. Montrer que pour tout sous-groupe H de G , $f(H)$ est un sous-groupe de G' .

2. Montrer que pour tout sous-groupe H' de G' , $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G .

Exercice 13 Soient G et G' deux groupes, e l'élément neutre de G et $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes. Montrer que f est injectif si et seulement si $\ker(f) = \{e\}$.

Exercice 14 Soient G et G' deux groupes et $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes surjectif.

1. Montrer que si G est monogène, alors G' est monogène.
2. Montrer que si G est cyclique, alors G' est cyclique.

Exercice 15 Montrer que les groupes $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}^+, \times)$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 16 Montrer que les groupes $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$ ne sont pas isomorphes.

Algèbre et analyse élémentaires

FEUILLE D'EXERCICES N° 4

NOMBRES RÉELS ET SUITES

Propriétés de $\mathbb{R}$, borne supérieure, partie entière

Exercice 1 Redémontrer l'inégalité triangulaire :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad ||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$$

Exercice 2 Soient A et B deux ensembles de $\mathbb{R}$. On suppose B borné et $A \subset B$.

1. Montrer que A est borné;
2. Montrer que $\sup A \leq \sup B$ et $\inf A \geq \inf B$.

Exercice 3 Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$. On note $A+B := \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$ et $AB := \{ab \mid a \in A, b \in B\}$. On suppose que A et B sont bornées :

1. Montrer que $A+B$ est borné et que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$ et $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$.
2. Montrer que AB est borné;
 - (a) si $A \subset \mathbb{R}^+$ et $B \subset \mathbb{R}^+$ montrer alors que $\sup(AB) = \sup(A) \times \sup(B)$.
 - (b) si $A = [-1, +1]$ et $B = [-3, 1]$, déterminer $\sup(AB)$.

Exercice 4 Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}$.

- On pose $C = \{1 - a \mid a \in A\}$, montrer que $\sup(C) = 1 - \inf(A)$.
- Soit $D = \{|x - y| \mid x, y \in A\}$, montrer que D est bornée et trouver sa borne supérieure.

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On définit les fonctions :

- $|f|$ par $|f|(x) = |f(x)|$ pour tout réel x ;
- f^+ par $f^+(x) = \sup(f(x), 0)$ pour tout réel x ;
- f^- par $f^-(x) = \sup(-f(x), 0)$ pour tout réel x ;

1. Soit $f(x) = \sin(x)$ dessiner les graphes de $f, |f|, f^+, f^-$.

2. Pour f quelconque, montrer que $|f| = f^+ + f^-$ et $f = f^+ - f^-$;
3. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $\sup(f, g)$ la fonction définie pour tout x par $\sup(f, g)(x) = \sup(f(x), g(x))$. Déterminer $\sup(f, g)$ en fonction de f, g et de leurs valeurs absolues. Faire de même pour la fonction $\inf(f, g)$.

Exercice 6 Déterminer les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants :

- $A = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^*\}$;
- $B = \{(-1)^n + \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^*\}$;

Exercice 7 Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une application croissante. Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$ (x est un point fixe pour f). *Indication : on pourra introduire $A = \{x \in [0, 1] | f(x) \geq x\}$.*

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x - E(x)$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq f(x) < 1$;
2. Montrer que la fonction f est périodique de période 1;
3. Dessiner le graphe de f .

Exercice 9 Démontrer la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, E\left(\frac{x}{2}\right) + E\left(\frac{x+1}{2}\right) = E(x).$$

La structure de corps

Exercice 10 On considère le sous-ensemble $A = \{x + y\sqrt{2} | x, y \in \mathbb{Q}\}$ de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il s'agit d'un sous corps du corps des réels $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Peut-on généraliser ?

Suites et limites

Exercice 11 Ecrire à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes :

- La suite $(u_n)_n$ est bornée à partir d'un certain rang;
- La suite $(u_n)_n$ ne converge pas vers $l \in \mathbb{R}$;
- La suite $(u_n)_n$ n'est pas convergente.

Exercice 12 On considère la suite $u_n = (-1)^{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}} [1 + \frac{1}{n+1}]$.

Donner un exemple explicite de sous-suite de la suite $(u_n)_n$ convergeant vers -1 , un exemple de sous-suite convergeant vers 1 , un exemple de suite extraite alternée.

Exercice 13 Etudier la convergence des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{3n^2+6}{n^2+1}$
2. $v_n = \frac{n+1}{n}(-1)^n$
3. $w_n = \frac{a^n}{n^p}$, $a > 0$
4. $a_n = \frac{1}{E(n\sqrt{2})}$

Exercice 14 Soit $(u_n)_n$ une suite de réels et soit $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ deux suites extraites définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. On suppose que $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$. Montrer que $(u_n)_n$ converge vers l .

Exercice 15 Etudier la convergence de la suite définie par : $u_{n+1} = 3u_n + 2(n \geq 0)$ et $u_0 = 2$.

Exercice 16 Montrer que toute suite $(u_n)_n$ avec $u_0 > 0$ et vérifiant pour tout $n \geq 1$,

$$u_n \geq u_0 + \dots + u_{n-1}$$

Exercice 17 Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ les suites définies par $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$. Montrer que ces deux suites convergent vers la même limite. Cette limite est-elle rationnelle ?

Exercice 18 On pose :

$$x_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p(p+2)}$$

Montrer que la suite $(x_n)_n$ tend vers $\frac{3}{4}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 19 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, on considère la suite $S_n = \sum_{i=0}^n a^i$.

1. Calculer S_n .
2. En déduire les valeurs de a pour lesquelles S_n est convergente ainsi que la valeur de l'éventuelle limite.

Exercice 20 Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, la suite $(S_l)_l$ définie par

$$S_l = \sum_{k=0}^l E\left(\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right)$$

converge vers n quand l tend vers $+\infty$. Indication : utiliser la relation de l'exercice 9.

1va.aux 1va.aux 1va.aux
Université de Provence, 2006/2007
Licence Semestre 1

Algèbre et Analyse élémentaire

NOM:-----

Test 1

I) Soit P et Q deux propositions ; comparer les tables de vérités de : P ou $(\text{non}P)$ et Q avec celle de $(P$ ou $Q)$ et celle de $(P$ et $Q)$.
Conclusion?

II Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$; Soit la proposition :

$$\forall y \in A, \exists x \in A, \text{ tel que } y > x$$

1) Ecrire en français cette phrase :

2) Nier (avec les symboles logiques) cette proposition .:

III) Montrer par une démonstration par l'absurde que le nombre $\sqrt{2}$ est tel que : $1 < \sqrt{2} < 2$.