# Algèbre linéaire

Martine Quinio

10 avril 2013

**Résumé**

Le cours commence par une introduction aux matrices 2 lignes et 2 colonnes afin de traiter un problème de population ; puis, on met en place l'outil vectoriel et on fait grossir les matrices...

## 1 Un problème concret...

Sur une île déserte, on introduit l'année 0 un couple de lapins qui donnera naissance après un an d'existence à un autre couple de lapins ; dès qu'un couple de lapins est mature, il donne naissance chaque année à un couple de lapins :

Comment calculer l'évolution théorique de cette population $U_n$ de lapins qui satisfait aux conditions $U_0 = U_1 = 1; U_{n+1} = U_n + U_{n-1}$ ?

Ce problème (Lapins de Fibonacci) qu'on appellerait aujourd'hui "expérience de pensée", a été traité par le mathématicien italien Léonard de Pise, dit Fibonacci, au XII siècle.

On a facilement

$\mathrm{U}_2 = 2; U_3 = 3; U_4 = 5; U_5 = 8;$

La suite (1,1, 2, 3, 5, 8, 13, 21....) est la suite de Fibonacci.

Cette suite fait intervenir le nombre d'or...

Mettons en évidence la commodité de l'outil vectoriel qui va permettre de remplacer un problème à deux "étages" par un problème plus simple à une dimension.

On pose $V_n = \begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \end{pmatrix}$, et un tableau : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ : alors on pose

$$V_{n+1} = MV_n$$

Ainsi sont définis une matrice et le produit de cette matrice par un vecteur. En fait, $V_n$ est une matrice unicolonne.

Le calcul de l'évolution de cette population se fera par la possibilité de calculer les puissances de la matrice M : c'est un problème qui formellement ressemble au calcul que l'on sait faire des éléments d'une suite géométrique...

On va mettre en place des objets nouveaux...

# 2 Matrices carrées d'ordre 2

**Définition 2.1** *On appelle matrice carrée d'ordre 2 tout tableau 2 lignes et 2 colonnes dont les éléments sont des réels a, b, c, d :* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

**Définition 2.2** *Pour tout couple (x,y) de réels et toute matrice* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$*, on définit un produit noté* $MU, U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *de la façon suivante :* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = U'$*,avec :*

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

Il faut voir ici la matrice comme moyen de transformer un vecteur en un autre vecteur.

A partir de cela, les opérations sur les matrices vont être facilement définies :

## 2.1 Opérations sur les matrices

### 2.1.1 L'addition de matrices

Il s'agit de faire en sorte qu'une cohérence soit respectée : étant données 2 matrices M et N, il est naturel de poser par définition :

$$(M + N)U = MU + NU$$

Pout tout $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Posons : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

Alors,

$$M + N = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

### 2.1.2 Multiplication par un scalaire

De la même façon et avec les mêmes notations, on pose pour tout réel $\lambda$ : $(\lambda M)U = \lambda(MU)$

Alors une nouvelle matrice est définie :

$$\lambda M = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

### 2.1.3 Multiplication de matrices

Encore avec les mêmes notations, on va définir cette fois le produit NM :

$$(NM)U = N(MU)$$

Il est en effet naturel de pouvoir déplacer les parenthèses...
Grâce au calcul de $MU$, puis de $N(MU)$, on a facilement :

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix}$$

**Exemple 2.1** *Calculons $M^2, M^3$ ...où $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ : on obtient :*

$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$...

**Remarque 2.1** *Ce produit n'est pas commutatif :*

Effectuons $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 15 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 17 \end{pmatrix}$

On est bientôt en mesure de résoudre le probème initial ; allons plus loin dans les opérations :

Avant cela, voyons des matrices particulières qui vont jouer un rôle...

1. *Matrice identité* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,appelée ainsi parce que : $IU = U$, pour tout $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
2. *Matrices diagonales :* $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$

Remarquons, on peut faire une récurrence immédiate, que $D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & d^n \end{pmatrix}$

1. *Matrices triangulaires :* $T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$, ou bien $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$
2. *La matrice nulle* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Matrice inverse** Par analogie avec l'inverse d'un réel, on pose, sans savoir encore si ce problème a une solution :

**Définition 2.3** *La matrice $M$ est inversible s'il existe une matrice notée $M^{-1}$ telle que $MM^{-1} = M^{-1}M = I$*

Ce problème encore une fois se résout à l'aide de $MU = U\prime$ :
Il suffit d'inverser le système :

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

Si $ad - bc \neq O$ : alors :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{ad-bc}(dx - by) \\ y = \frac{1}{ad-bc}(-cx + ay) \end{cases}$$

Alors la matrice inverse de $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $M^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

**Définition 2.4** *On donne le nom de déterminant de la matrice* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *au réel noté*

$$DetM = ad - bc$$

# 3 Application : une matrice pour deux problèmes...

## 3.1 Résolution d'un système différentiel

Le calcul matriciel en dimension 2 nous permet de résoudre le problème suivant :

Comment résoudre un *système* différentiel : x(t) et y(t) sont les coordonnées d'un point en fonction de la variable t : soit par exemple le système suivant avec les conditions initiales $x(0) = a$ et $y(0) = b$

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = -5x(t) - 4y(t) \end{cases}$$

On procède ainsi : c'est un problème à deux dimensions ;

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$$

Le problème se traduit matriciellement par :

$$X\prime(t) = AX(t)$$

Si M était une matrice diagonale, on aurait à résoudre indépendamment deux équations différentielles :

Essayons de trouver une matrice diagonale associée au problème...

On va procéder étape après étape :

1) Déterminer les solutions de l'équation $det(A - \lambda I) = 0$

2) Choisir pour chacune des deux valeurs obtenues un vecteur $u = (x_\lambda, y_\lambda)$
tel que : $AU = \lambda U$

3) Ecrire la matrice P dont les colonnes sont les composantes des vecteurs choisis.

4) Ecrire la matrice inverse $P^{-1}$ et montrer que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale que l'on appelle D.

5) Poser $X_1(t) = P^{-1}X(t)$;et $X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$

Former le système d'équations associé à cette écriture matricielle ;

Montrer que $X_1'(t) = P^{-1}X'(t)$ et que $X_1'(t) = DX_1(t)$

En déduire facilement $X_1(t)$, puis, $X(t)$ satisfaisant aux conditions initiales : $x(0) = a$ et $y(0) = b$

*Solution de ce problème :*

1) On obtient les solutions de l'équation $det(A - \lambda I) = 0$ : ce sont 1 et -3, solutions de l'équation $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$.

2) Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ : pour $\lambda = 1$ :

$AU = U$ si $\begin{cases} 2x + y = x \\ -5x - 4y = y \end{cases}$ les deux équations se réduisent à une seule : $x + y = 0$ :

On peut choisir : $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ par exemple ;

De même, on peut choisir pour l'autre solution $\lambda = -3$ : $U_{-3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ par exemple

3) La matrice P est alors : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$

4) La matrice inverse $P^{-1}$ est : $P^{-1} = \dfrac{-1}{4} \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

la matrice $P^{-1}AP$ est après calcul : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = D$

C'est bien une matrice diagonale, dont les éléments de la diagonale sont, quels que soient les choix de $U_\lambda$ les solutions de l'équation $det(A - \lambda I) = 0$ : 1 et -3 ;

5) Alors posons $X_1(t) = P^{-1}X(t)$ :

On a $X_1'(t) = P^{-1}X'(t)$ parce qu'on peut dériver chaque ligne du système $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \dfrac{-1}{4} \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

Le système d'équations associé à cette écriture matricielle étant :

$$\begin{cases} \dfrac{-1}{4}(-5x(t) - y(t)) = x_1(t) \\ \dfrac{-1}{4}(x(t) + y(t)) = y_1(t) \end{cases}$$

Cherchons une relation entre $X_1'(t)$ et $X_1(t)$

On a $X_1'(t) = P^{-1}X'(t)$ et

$$X\prime(t) = AX(t)$$

Donc $X_1'(t) = P^{-1}AX(t)$

Comme $X_1(t) = P^{-1}X(t)$, alors : $X(t) = PX_1(t)$

Donc : $X_1'(t) = (P^{-1}A)X(t) = (P^{-1}AP)X_1(t) = DX_1(t)$ :

Donc :

$$X_1'(t) = DX_1(t)$$

Mais D est diagonale : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = D$

Donc $\begin{cases} x_1(t) = x_1'(t) \\ -3y_1(t) = y_1'(t) \end{cases}$

On sait résoudre : les fonctions sont séparées !

On obtient : $x_1(t) = k \exp t$ et $y_1(t) = k' \exp(-3t)$; k et k' étant des constantes ;

Comme $X(t) = PX_1(t)$, on a facilement $X(t)$ :ensuite, à l'aide des conditions initiales, on trouve les solutions du problème :

Ce sont

$$x(t) = \frac{1}{4}(5a + b) \exp t - \frac{1}{4}(a + b) \exp(-3t)$$

et
$$y(t) = -\frac{1}{4}(5a+b)\exp t + \frac{5}{4}(a+b)\exp(-3t)$$

### 3.2 Puissances d'une matrice

Le travail précédent nous est encore utile pour trouver les puissances de la matrice A précédente :

Comme $P^{-1}AP = D$, on a : $P^{-1}DP = A$ (il suffit de multiplier la relation $P^{-1}AP$ à gauche par P et à droite par $P^{-1}$)

Or, comme D est diagonale, il est facile de voir que les puissances de D sont :
$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$$
:

or on a : $P^{-1}D^nP = A^n$ (par une récurrence immédiate)

Donc le calcul de $A^n$ est facile : par exemple, on a
$$A^{10} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5-3^{10} & 1-3^{10} \\ -5(1-3^{10}) & 5.3^{10}-1 \end{pmatrix}$$

Pour aller plus loin..

### 3.3 Résolution du problème d'introduction

Une méthode efficace de calcul de puissance de matrice...objectif : connaître l'évolution de la fameuse population $U_n$ de lapins...

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dont on se propose de calculer les puissances :

1) Ecrire la relation $A^2 - tr(A)A + det(A)I$ pour cette matrice ;

2) On note P(X) le polynöme $P(X) = X^2 - X - 1$ : résoudre $P(X) = 0$.

La division euclidienne de $X^n$ par $P(X)$ donne la relation $X^n = P(X)Q_n(X) + R_n(X)$ :

Quel est le degré de $R_n(X)$ ? On note $R_n(X) = a_nX + b_n$ :Calculer alors $R_n(X)$ en utilisant les solutions $\varphi$ et $\varphi'$ de $P(X) = 0$, sans calculer $Q_n(X)$ ;

3) Montrer que $A^n = a_nA + b_nI$

4) Expliciter alors $A^n$ : le problème des puissances de A est résolu...du même coup :

5) Montrer que $U_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{n+1}$. Quelle est la limite du rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ ?

SOLUTION

1) On a la relation $A^2 - A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) Le polynöme $P(X) = X^2 - X - 1$ a pour solutions $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \varphi'$

La division euclidienne de $X^n$ par $P(X)$ donne la relation $X^n = P(X)Q_n(X) + R_n(X)$ : le degré de $R_n(X)$ est 0 ou 1 : on peut poser $R_n(X) = a_nX + b_n$

En remplaçant X par $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, on trouve : $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n = a_n\frac{1+\sqrt{5}}{2} + b_n = a_n\varphi + b_n$

et $(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n = a_n\varphi' + b_n$ :

D'où $a_n = \dfrac{\varphi^n - \varphi'^n}{\varphi - \varphi'}$, et $b_n = \dfrac{\varphi\varphi'^n - \varphi'\varphi^n}{\varphi - \varphi'}$

3) On a $A^n = a_n A + b_n I$ car $P(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;

4) Ainsi, on a $A^n = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ a_n & a_n + b_n \end{pmatrix}$

5) La population de lapins le mois n est $U_n$ ; elle équivaut à $\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{n+1}$ quand n tend vers l'infini, car :

$V_n = \begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \end{pmatrix} = A^n V_0 = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ a_n & a_n + b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc : $U_n = a_n + b_n$ :

Comme $|\varphi'| < 1, \lim \varphi'^n = 0$ :

On alors $U_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{n+1}$, et surtout, le rapport $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ tend vers $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, le nombre d'or.

# 4 Espaces vectoriels, bases, dimension

On va donner un cadre théorique permettant d'utiliser l'outil matriciel.

Donnons d'abord des rappels (pas sûr...) sur les ensembles usuels qui seront utiles ici ; les étudiants ne connaissent pas forcément les notations :

On note : $\mathbb{R}^n$ : l'ensemble des n-uplets ($x_1$,$x_2$, ...$x_n$), les $x_i$ étant réels ;

On définit dans $\mathbb{R}^n$ deux opérations :

- L'addition : $(x_1, x_2, ...x_n) + (y_1, y_2, ...y_n) =((x_1 + y_1), (x_2 + y_2), ...(x_n + y_n))$

–La multiplication par un scalaire $\lambda(x_i)_{i\leq n} =(\lambda x_i)_{i\leq n}$

On note : $\mathbb{R}[X]$ : l'ensemble des polynômes à coefficients réels, $\mathbb{R}_n[X]$ : l'ensemble formé du polynôme nul et des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n :

On définit dans $\mathbb{R}[X]$ deux opérations :

- L'addition : $(P + Q)(X) = P(X) + Q(X)$

–La multiplication par un scalaire $(\lambda P)(X) = \lambda P(X)$

Dans $E_2$ l'ensemble des vecteurs du plan , $E_3$ l'ensemble des vecteurs de l'espace, on a défini ces opérations ; alors :

## 4.1 Qu'y a-t-il de commun entre $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}[X]$, $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$?

### 4.1.1 Des vecteurs pas comme les autres...

Plus précisémént :

*Peut-on dégager une structure commune entre des ensembles aussi divers que :*
$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}[X]$, $\mathrm{M}_2(\mathbb{R}), E_2, E_3$...?

On peut définir dans chacun d'eux :

- Une addition dont le résultat est un élément de l'ensemble ;
- Une multiplication par un scalaire réel, dont le résultat est un élément de l'ensemble ;

et ces opérations possèdent des caractéristiques communes ; un élément neutre :

*L'élément neutre de* $\mathbb{R}^2$ *muni de l'addition est (0,0), celui de* $\mathbb{R}^3$ : $(0, 0, 0)$, *celui de* $\mathbb{R}[X]$ : *le polynôme nul, celui de* $M_2(\mathbb{R})$ : *la matrice nulle, celui de* $E_2$ : $\overrightarrow{0}$...

| Ensemble E : | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}^n$ | $\mathbb{R}[X]$ | $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ | $E_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Stabilité pour la somme ? | oui | oui | oui | oui | oui |
| Multiplication par scalaire | $\lambda x$ | $(\lambda x_i)_{i\leq n}$ | $\lambda P(X)$ | $\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$ | $\lambda \overrightarrow{u}$ |
| Neutre | 0 | (0,0,...0) | Polynôme nul | $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\overrightarrow{0}$ |

Dans les ouvrages d'algèbre linéaire, on trouve la définition d'un *espace vectoriel :*

Il s'agit d'un ensemble muni des 2 opérations définies ci-dessus dans lesquels les calculs peuvent s'effectuer avec les mêmes règles :

*Ce qu'ils ont en commun est la façon de combiner les éléments à l'intérieur des ensembles- les opérations, les règles de calcul- même si les ensembles sont très différents.*

Ils ont tous un élément neutre pour l'addition.

On dira alors que, munis de ces 2 opérations, ces ensembles possèdent une structure commune que l'on désigne par espace vectoriel (référence à $E_2, E_3$).

Ainsi $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}[X]$, $\mathrm{M}_2(\mathbb{R}), E_2, E_3$, munis de ces 2 opérations, sont des espaces vectoriels :

Ce sont nos espaces vectoriels de référence.

Leurs éléments sont appelés aussi vecteurs :

Maintenant : $(2, \sqrt{5}), (-7, \sqrt{3}), (2, -\frac{2}{7}), (x, y)$...sont des *vecteurs* de $\mathbb{R}^2$;
$(2, 0, \sqrt{5}), (1, -7, \sqrt{3}), (3, 2, -\frac{2}{7}), (x, y, z))$...sont des *vecteurs* de $\mathbb{R}^3$;
$X^2 - 4X + \sqrt{5}; aX^2 + bX + c$...sont des *vecteurs* de $\mathbb{R}[X]$, plus précisément, de $\mathbb{R}_2[X]$...

# 5 Objectifs, avertissement

Dans le paragraphe suivant, on va décrire les vecteurs d'un espace vectoriel en utilisant un minimum de vecteurs, généralisant ainsi la notion de repère pour un espace affine.

L'idée est la suivante : dans le plan $E_2$, on peut décrire précisément tout vecteur $\overrightarrow{u}$ dès que l'on a défini une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ :

Il existe un unique couple $(x, y)$ tel que

$$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$$

Commenons par les espaces connus $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

**Remarque 5.1** *Pour certaines mentons de licence, seul le paragraphe ci dessous concernant les espaces $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont importants ; on pourra donc éventuellement n'étudier que les parties concernant $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ et ensuite directement passer aux matrices et systèmes...*

# 6 Droite vectorielle et plan vectoriel de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

En géométrie vectorielle, les ensembles sont constitués de vecteurs, alors qu'en géométrie affine, ils sont constitués de points ; on peut décrire une droite affine ou un plan affine par :

- Une (ou plusieurs) équation) cartésienne
–Une représentation paramétrée

**Définition 6.1** *Dans $\mathbb{R}^3$, tout triplet de vecteurs non coplanaires $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base ; CNS : Det$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ non nul.*

Comment représenter un plan vectoriel ? une droite vectorielle ?

Une droite vectorielle D est l'ensemble des vecteurs colinéaires à un vecteur non nul de D :

Tout vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ de D est un vecteur directeur de D ;

**Définition 6.2** *On dit aussi que $\overrightarrow{u}$ non nul de D est une base de D :*

Soit $D = \{t\overrightarrow{u}; t \in \mathbb{R}\}$

## 6.1 Représentation paramétrée

On notera $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$ :
$D = \{(x, y, z), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}$, tel que : $x = ta$ , $y = tb$, $z = tc$ } :

Un plan vectoriel P est l'ensemble des vecteurs :

$P = \{s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}; s, t \in \mathbb{R}\}$

RP (représentation paramétrée) : On notera $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$ : et $\overrightarrow{v} = (e, f, g)$ :

$P = \{(x, y, z), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}$, tel que : $x = sa + te$ , $y = sb + tf$, $z = sc + tg$ } :

**Définition 6.3** *Tout couple de vecteurs non colinéaires d'un plan vectoriel P est une base de P.*

**Exemple 6.1** *Dans $E = \mathbb{R}^3$, soit $P = \{(s, t, 3s + t), s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}$ : P est le plan de base $u = (1, 0, 3)$ et $v = (0, 1, 1)$*

## 6.2 Equations cartésiennes

Un plan vectoriel a pour équation cartésienne (EC)
$P = \{(x, y, z), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}$, tel que : $ax + by + cz = 0$ }
Interprétation : $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$ est un vecteur normal à P.

Une droite vectorielle est l'intersection de 2 plans; elle a pour équation cartésienne :
$D = \{(x, y, z), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}$, tel que : $ax + by + cz = 0$ et $ex + fy + gz = 0\}$ :

On peut obtenir une RP de la droite en résolvant le système : deux inconnues en fonction de la troisième...

**Exemple 6.2** *Dans $\mathbb{R}^3$*
*Déterminer une EC du plan P :*

$x = 2s - t$ , $y = t$, $z = s + t$

*La droite D : $x = u$ , $y = 2u$, $z = -u$ est elle incluse dans P ?*
*D est-elle orthogonale P ?*

Dans $\mathbb{R}^3$

Une EC du plan P :
$x = 2s - t$ , $y = t$, $z = s + t$

peut s'obtenir en cherchant un vecteur normal l'aide du produit vectoriel de
$\overrightarrow{v} = (2, 0, 1) ett \overrightarrow{w} = (-1, 1, 1)$ vecteurs directeurs de P.

On obtient une EC de P :
$-x-3y+2z=0$
La droite D : $x=u$ , $y=2u$, $z=-u$
est elle incluse dans P si $-u-3(2u)+2(-u)=0$ :

non, D n'est pas incluse dans P ; autres méthodes possibles par les vecteurs directeurs...

D est-elle orthogonale P ? Non : Il suffit de remarquer que le vecteur $(1,2,-1)$, vecteur directeur de D n'est pas colinéaire un vecteur normal P, soit le vecteur $(-1,-3,2)$.

## 6.3 Intersections dans $\mathbb{R}^3$

On peut intuitivement se représenter une droite vectorielle par un immense bouquet de fleurs dont les tiges sont parallèles et de longueur variables. On peut intuitivement se représenter un plan vectoriel par un immense millefeuille !

**Exemple 6.3** *Dans* $\mathbb{R}^3$,*muni d'une base* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *soit* $\overrightarrow{u}$ *de composantes* $(1,1,3)$ : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$

Soit $F = \{x\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j} + 3x\overrightarrow{k}; x \in \mathbb{R}\} = \{x\overrightarrow{u}, x \in \mathbb{R}\}$ : F est le *sous espace vectoriel engendré* par le vecteur $\overrightarrow{u}$. C'est une droite vectorielle, $dimF = 1$

**Exemple 6.4** *Dans* $E = \mathbb{R}^3$, *soit* $F = \{(x, y, 3x + y), x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$ *: F est le* sous espace vectoriel engendré *par* $v = (1, 0, 3)$ *et* $w = (0, 1, 1)$ : *C'est un plan vectoriel,* $dimF = 2$

**Exemple 6.5** *Dans* $E = \mathbb{R}^3$, *soit* $F = \{(x, y, z), x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R},$ *tel que :* $x + y = 0$ *et* $x - 3y + z = 0\}$ *:*

En résolvant le système $x + y = 0$ et $x - 3y + z = 0$, on obtient $y = -x$ et $z = -4x$ : donc F est le *sous espace vectoriel engendré* par le vecteur $u = (1, -1, -4)$. C'est une droite vectorielle, $dimF = 1$
C'est l'intersection de deux plans...Généralisons...
Quelle est l'intersection de F et de G dans les cas suivants ?

**Exemple 6.6** *Soit* $\overrightarrow{a} = (5, 1, 3)$, $\overrightarrow{b} = (1, 3, 1)$ *et* $\overrightarrow{c} = (2, -1, 1)$
*Soit* $D = Vect(\overrightarrow{a})$ *:*
*Cela veut dire que* $\overrightarrow{a}$ *est un vecteur directeur de D*

*P=* $Vect(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$
*Cela veut dire que* $(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ *sont des vecteurs directeurs de P*
*D=*$\{x\overrightarrow{a}, x \in \mathbb{R}\}$
*D est le* sous espace vectoriel engendré *par le vecteur* $\overrightarrow{a}$.
$D = \{(5x, x, 3x), x \in \mathbb{R}\}$
*C' est la droite vectorielle, de base* $\overrightarrow{a}$ *;* $dimD = 1$

*P=*$\{y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c}, y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\}$

*P est le* sous espace vectoriel engendré *par* $\overrightarrow{b} = (1, 3, 1)$ *et* $\overrightarrow{c} = (2, -1, 1)$

*C'est le plan vectoriel, de base* $\overrightarrow{b} = (1,3,1)$ *et* $\overrightarrow{c} = (2,-1,1)$
$P = \{(y+2z, 3y-z, y+z), y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\}$ *:*
$dimP = 2$

*L'intersection d'une droite et d'un plan est :*
*Soit la droite si celle ci est incluse dans le plan ;*
*Soit le vecteur nul, seul commun à tous les sous espaces.*

*On peut procéder de diverses manières :*
*- Voir si les vecteurs* $\overrightarrow{a} = (5,1,3)$, $\overrightarrow{b} = (1,3,1)$ *et* $\overrightarrow{c} = (2,-1,1)$ *sont ou non coplanaires ; on peut calculer le déterminant de ces vecteurs ; il est nul. On peut aussi remarquer que* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{c}$ *Donc l'intersection de D et de P est la droite D*

**Exemple 6.7** *Dans* $E = \mathbb{R}^3$, *soit* $F = \{(x, y, 3x+y), x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$ *: F est le* sous espace vectoriel engendré *par* $v = (1,0,3)$ *et* $w = (0,1,1)$ *: C'est un plan vectoriel,* $dimF = 2$ *Quelle est l'intersection de F et de G ?*

**Exemple 6.8** *Dans* $E = \mathbb{R}^3$, *soit* $F = \{(x,y,z), x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R},$ *tel que :* $x + y - 3z = 0\}$ *;*
*Soit G=* $Vect(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, *avec :* $\overrightarrow{a} = (1,-1,0)$, $\overrightarrow{b} = (1,0,-1)$
*L'intersection de 2 plans est :*
*Une droite vectorielle, sauf si ces plans sont confondus Or : On peut remarquer que* $\overrightarrow{a}$ *appartient à F mais que* $\overrightarrow{b}$ *n'appartient pas à F Donc l'intersection des 2 plans F et G est la droite vectorielle de base* $\overrightarrow{a}$.

Comment généraliser cela à un espace vectoriel $E$?

# 7 Combinaison linéaire ; Bases...

Essayons avec les espaces vectoriels de référence :

1. $E = \mathbb{R}^2$ : tout couple $(a,b) = a(1,0) + b(0,1)$ : la famille $((1,0);(0,1))$ joue un rôle analogue à celui joué par $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
2. $E = M_2(\mathbb{R})$ : toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aU_1 + bU_2 + cU_3 + dU_4$ : la famille $(U_1, U_2, U_3, U_4)$ joue un rôle analogue à celui joué par $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
3. $E = \mathbb{R}_2[X]$ : tout polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ s'écrit : $P(X) = aX^2 + bX + c$ : la famille $(1, X, X^2)$ joue un rôle analogue à celui joué par $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$...
4. $E = \mathbb{R}[X]$ : il semble impossible de trouver une telle famille dans ce cas...

Donnons les définitions qui semble découler de ces exemples :

**Définition 7.1** *Pour toute famille de vecteurs* $(U_1, U_2, U_3, ...U_p)$ *on appelle* ***combinaison linéaire*** *des vecteurs de cette famille tout vecteur V de E qui s'écrit*

$$V = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i U_i$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ...\lambda_p$ étant des scalaires quelconques.

**Définition 7.2** *Une famille de vecteurs* $(U_1, U_2, U_3, ...U_p)$ *est appelée* ***famille génératrice*** *de E si tout vecteur de E peut s'écrire comme une COMBINAISON LINEAIRE des vecteurs de cette famille :*

*C'est à dire si, pour tout vecteur V de E, il esiste des scalaires* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ...\lambda_p$ *tels que :*

$$V = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i U_i$$

**Exemple 7.1** *Un plan vectoriel a comme famille génératrice tout couple de vecteurs non colinéaires.*

**Exemple 7.2** *Une droite vectorielle a comme famille génératrice tout vecteur non nul.*

**Exemple 7.3** *Les familles mises en évidence au dessus sont des familles génératrices de leurs espaces respectifs : la famille* $(1, X, X^2)$ *est génératrice de* $\mathbb{R}_2[X]$; *également, la famille* $(1, X, X^2, 1 + 6X + X^2)$ :

$P(X) = aX^2 + bX + c = c.1 + b.X + c.X^2 + 0.(1 + 6X + X^2)...$

**Définition 7.3** *Un* sous ensemble F non vide d'un espace vectoriel E en est un sous espace vectoriel si pour tous vecteurs u et v de F et tous scalaires $\alpha, \beta$, $\alpha u + \beta v$ *appartient à F.*

**Remarque 7.1** *Il est équivalent de dire :* pour tous vecteurs u et v de F et tout scalaire $\alpha$, $u + v$ *et* $\alpha u$ *appartiennent à F.*

Pour une famille de vecteurs qui n'est pas génératrice de l'espace vectoriel E, on peut définir maintenant une notion liée aux familles génératrices : celle de *sous espace vectoriel engendré* par cette famille de vecteurs :

**Définition 7.4** *(Et proposition) Toute famille de vecteurs* $(U_1, U_2, U_3, ...U_m)$ *de E engendre un espace vectoriel F contenu dans E : l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des éléments de la famille.*

**Preuve 7.1** *Facile : la somme de combinaisons linéaires des éléments de la famille est une combinaison linéaire des éléments de la famille.*

**Exemple 7.4** *Dans* $E = \mathbb{R}^2$,*soit* $u = (1,1)$ *:* $F = \{x(1,1), x \in \mathbb{R}\}$=$\{(x,x), x \in \mathbb{R}\}$ *: F est le* sous-espace vectoriel engendré *par le vecteur u.*

**Exemple 7.5** *Dans* $E = \mathbb{R}_2[X]$ : $F = \{P(X) = aX + b,\ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ *F est le* sous-espace vectoriel engendré *par les vecteurs* $(1, X)$*. C'est* $\mathbb{R}_1[X]$

**Exemple 7.6** $\mathbb{R}_2[X]$ *est un* sous-espace vectoriel *de* $\mathbb{R}[X]$;*c'est le* sous-espace vectoriel engendré *par les vecteurs* $(1, X, X^2)$.

**Remarque 7.2** *Tout* sous espace vectoriel d'un espace vectoriel E en est un sous ensemble et contient au moins l'élément neutre de E. Il possède aussi la structure d'espace vectoriel. On donne alors une caractérisation plus générale (en dimension finie ou pas) d'un sous espace vectoriel F d'un espace vectoriel E :

Avançons dans la recherche de décrire avec le minimum d'informations un espace vectoriel donné...

Il est facile de remarquer que l'on a la proposition :

**Proposition 7.1** *Si une famille de vecteurs* $(U_1, U_2, U_3, ...U_p)$ *est famille génératrice de E, alors toute "sur famille" c'est à dire toute famille contenant la précédente est aussi génératrice :*

On voit donc que l'objectif est pour un espace vectoriel donné, de trouver si possible des familles génératrices les plus "petites" possible...

D'où la

**Définition 7.5** *On appelle base d'un espace vectoriel E, toute famille génératrice B minimale*

Cela veut dire que toute sous famille de B est non génératrice.

**Exemple 7.7** $(1, X, X^2)$ *est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$

**Exemple 7.8** *E est l'ensemble des vecteurs du plan au sens géométrique, muni d'une base* $(\vec{i}, \vec{j})$ *donnée : cette base au sens "classique" est encore une base avec notre définition...heureusement !*

**Proposition 7.2** *Une famille de vecteurs* $(U_1, U_2, U_3, \ldots U_n)$ *est une base de E si et seulement si tout vecteurU de E se décompose de façon unique sur cette base*

Cela veut dire que tout vecteur U est une combinaison linéaire des vecteurs de la base, et ce de manière unique.

On retrouve le vocabulaire emprunté à la géométrie vectorielle.

**Preuve 7.2** *Si* $(U_1, U_2, U_3, \ldots U_n)$ *est une base de E :*

*L'existence d'une décomposition pour un vecteur quelconque découle de la définition même de famille génératrice ; il reste à montrer que si, de plus, la famille génératrice est minimale-une base-alors la décomposition est unique :*

*Supposons donc, par l'absurde, qu'un vecteur* $U$ *admette sur cette base deux décompositions :*

*Alors :* $U = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' U_i$; *posons alors* $x_i = \lambda_i - \lambda_i'$ *:*

*On a* $0_E = \sum_{i=1}^{n} x_i U_i$, *et au moins un des* $x_i$ *est non nul : posons* $x_I$ *un de ces réels non nuls :*

*Puisque* $x_I U_I = \sum_{i=1 i \neq I}^{n} x_i U_i$, *il est facile de remarquer qu'alors la sous famille* $(U_1, U_2, U_3, \ldots U_n) \backslash U_I$ *est génératrice, ce qui contredit le caractère minimal de la base.*

*Réciproquement, le caractère minimal découle de l'unicité de la décomposition de* $O_E$

*Certaines bases jouent des rôles particuliers, sont plus utiles que d'autres, elles sont alors bases de référence : on les appelle* bases canoniques *:*

*Base canonique de :*

$\mathbb{R}^2 : ((1,0),(0,1))$; *de* $\mathbb{R}^3 : ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$;

*de* $\mathbb{R}_2[X] : (1, X, X^2)$, *de* $M_2(\mathbb{R}) : (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$...

La preuve de la proposition précédente a mis en évidence la notion de *famille libre, liée :* donnons la

**Définition 7.6** *Une famille de vecteurs* $(U_1, U_2, U_3, \ldots U_p)$ *est une* famille liée *de E si l'un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres. Dans le cas contraire, on dit que la famille est libre :*

Ainsi :

**Définition 7.7** *Une famille de vecteurs* $(U_1, U_2, U_3, \ldots U_p)$ *est une* famille libre *de E si le vecteur nul de E se décompose de façon unique sur cette famille.*

**Famille libre : cela veut dire que si :** $0_E = \sum_{i=1}^{p} x_i U_i$, **alors tous les** $x_i$ **sont nuls.**

Il n'est pas difficile de montrer que l'on a la

**Proposition 7.3** *Une famille de vecteurs* $(U_1, U_2, U_3, \ldots U_n)$ *est une base de E si et seulement si cette famille est génératrice et libre.*

On admet que toutes les bases d'un espace vectoriel, s'il en existe, comportent le même nombre n de vecteurs ; ce nombre n est alors appelé la dimension de l'espace vectoriel ; certains espaces vectoriels n'ont pas de base : on dit qu'ils sont de dimension infinie.

**Exemple 7.9** *Dim* $\mathbb{R}^3 = 3$; *Dim* $\mathbb{R}^n = n$; *Dim* $\mathbb{R}_2[X] = 3$; *Dim* $M_2(\mathbb{R}) = 4$...

**Exemple 7.10** $\mathbb{R}[X]$ *est de dimension infinie.*

# 8 En pratique...

Enfin on a les propositions importantes en pratique :

**Proposition 8.1** *Si F est un* sous espace vectoriel d'un espace E de dimension finie, alors dimF$\leq \dim E$;*si* $dimF = dimE$, *alors* $E = F$.

**Proposition 8.2** *Dans un* espace E de dimension finie n, toute famille génératrice comportant n vecteurs est une base de E, toute famille libre comportant n vecteurs est une base de E.

**Exemple 8.1** *Considérons dans* $\mathbb{R}^3$ *les vecteurs u=(0,1,1) ; v=(1,0,1),w=(0,0,1) :*

Pour montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$,
on montre que la famille est libre :
Si $\alpha u + \beta v + \gamma w = (0,0,0)$ alors on a en identifiant après développement : $\beta = 0; \alpha = 0; \alpha + \beta + \gamma = 0$ :
Donc c'est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ : c'est une base.
Tout vecteur a donc une unique décomposition sur la base canonique et une unique décomposition sur la base (u,v,w) :
Par exemple, les coordonnées de $U = (2,3,-1)$ la base canonique : ce sont : 2,3,-1 ;
Dans la base (u,v,w), on écrit : $U = \alpha u + \beta v + \gamma w = (\beta; \alpha; \alpha + \beta + \gamma) = (2,3,-1)$ et on trouve facilement $\alpha, \beta, \gamma$.
$\beta = 2; \alpha = 3; \gamma = -6$ :
Les coordonnées de $U$ dans la base (u,v,w) sont : 3,2,-6
Vérification :
$U = (2,3,-1) =$ 2(1,0,0)+3(0,1,0)-1(0,0,1)
$U = (2,3,-1) =$ 3(0,1,1)+2(1,0,1)-6(0,0,1)

En pratique, on utilise souvent la notion de déterminant ; voir paragraphe ci-dessous pour rappels.

**Proposition 8.3** *Un système de 3 vecteurs de E de dimension 3 est une base de E si et seulement si le déterminant de ce système est non nul.*

**Exemple 8.2** *Les vecteurs* $u = (1,1,0), v = (1,1,1), w = (1,0,0)$ *forment une base de* $\mathbb{R}^3$ :

On a facilement $DetM = 1$, donc $(u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

**Exemple 8.3** *Considérons dans* $\mathbb{R}^3$ *les vecteurs u=(0,1,1) ; v=(1,0,1),w=(0,0,1) :*

Pour montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$,
le plus simple est de montrer que le déterminant est non nul ; or ce déterminant vaut -1...
Règle pratique pour le calcul de déterminants d'ordre 3 : règle de Sarrus :
On peut remarquer que :

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a(ei-fh)-d(bi-ch)+g(bf-ec) = aei+bfg+cdh-(ceg+bdi+afh)$ :

On peut formellement adjoindre deux colonnes supplémentaires, les deux premières et faire apparaître des "diagonales"...

$\left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right.$

Des rappels ?

# 9 Rappels sur les déterminants

On généralise à présent les résultats vus en dimension 2 : L'outil déterminant sera le plus simple pour caractériser des bases...

Dans un espace E orienté par une base orthonormée directe B, on appelle

**Définition 9.1** *Déterminant (ou produit mixte) de* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ *dans la base* $\mathcal{B}$ *le scalaire*

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in E^3, \quad \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \langle \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{w} \rangle .$$

On a aussi : $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \langle \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} \mid \overrightarrow{u} \rangle$

On a en particulier :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{3} \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, e_i)\, e_i$$

**Proposition 9.1** *Pour toute base orthonormée directe :*

$$Det\,(e_1, e_2, e_3) = 1$$

pour toute base orthonormée $(e'_1, e'_2, e'_3)$ indirecte : $\mathrm{Det}(e'_1, e'_2, e'_3) = -1$;

On peut alors montrer que :

Si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ sont des vecteurs de $E^3$, leurs composantes (a,d, g), (b,e, h), (c, f, i) étant mises en colonnes dans une matrice M, le déterminant $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est donné par la formule ci-dessous :

$$Det($$

$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}))$
=a(ei-fh)-d(bi-ch)+g(bf-ec)

## 9.1 Pour bien comprendre...

*Il y a une difficulté en algèbre linéaire : les ensembles dans lesquels on travaille sont divers et variés ; il importe avant toute chose de bien se repérer, savoir faire la distinction entre vecteurs et coordonnées etc ; un tableau pour faire le point :*

**Quels sont les vecteurs d'un espace donné ?**

Quels sont les vecteurs de $\mathbb{R}^3$?
Ce sont les triplets (x,y,z)
Quels sont les vecteurs de $\mathbb{R}[X]$?
Ce sont les polynômes
Quels sont les vecteurs de $M_2(\mathbb{R})$?
Ce sont les matrices carrées d'ordre 2

Récapitulons :

| Espace E : | $\mathbb{R}^3$ | $\mathbb{R}_2[X]$ |
|---|---|---|
| Vecteur u de E : | $u = (x, y, z)$ | $u = aX^2 + bX + c$ |
| Base canonique B : | $B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ | $B = (1, X, X^2)$ |
| Coordonnées de u dans B : | $(x, y, z)$ | $(c, b, a)$ |

**Remarque 9.1** *Les choses sont plus simples dans* $\mathbb{R}^n$ *que dans un autre espace de dimension n :*

Dans les vecteurs sont confondus avec leurs n-uplet de coordonnées : voir dans ce tableau les lignes 2 et 4...

**Comment caractériser une base ?**

Une famille de vecteurs $(U_1,U_2,U_3,...U_n)$ est une base de E si et seulement si tout vecteur U de E se décompose de façon unique sur cette base.

Une famille de vecteurs $(U_1,U_2,U_3,...U_n)$ est une base de E si et seulement si c'est une famille libre est génératrice.

Dans un *espace E de dimension finie n, toute famille libre comportant n vecteurs est une base de E.*

Dans un *espace E de dimension finie n, toute famille génératrice comportant n vecteurs est une base de E : c'est une famille génératrice minimale.*

Et surtout le plus simple :
Un système de 3 vecteurs de E de dimension 3 est une base de E si et seulement si ils sont

non coplanaires si et seulement si le déterminant est non nul.

# 10 Matrices

Il est maintenant naturel de poser la

**Définition 10.1** *On appelle matrice n colonnes, p lignes tout tableau ayant p colonnes et n lignes, dont les éléments sont des réels quelconques.*

**Exemple 10.1** $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -7 & 0 \\ 0.5 & \sqrt{2} & 4 & -6 \\ -5 & 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$...

Interprétons :

Donnons nous cette fois 2 espaces vectoriels E et F, munis chacun d'une base ; notons $dimE = p$, $dimF = n$ :

Toute matrice M associe  un vecteur de E exprimé dans la base de E donnée un vecteur de F exprimé dans la base de F donnée : On peut interpréter toute matrice comme celle d'une application f, appelée application linaire, transformant un vecteur u de E en un vecteur u'=f(u) de F :

Précisément, on a le

**Théorème 10.1** *Soient des espaces vectoriels E et F, munis chacun d'une base ; notons $dimE = p$, $dimF = n$ :*

Base de E : $(b_j)_{,j\leq p}$;Base de F : $(\beta_i)_{,i\leq n}$ Toute matrice M associe  un vecteur de E exprimé dans la base de E donnée un vecteur de F exprimé dans la base de F donnée : Une matrice M donnée permet de définir avec la relation MU=U' une unique application f, et cette application est linéaire, c'est  dire vérifie la définition :

**Définition 10.2** *Soient des espaces vectoriels E et F ; une application f de E dans F est linaire si pour tout vecteur u de E, pour tout vecteur v de E, pour tout réel $\lambda$ :*
$f(u + \lambda v)) = f(u) + \lambda f(v)$

**Preuve 10.1** *Il est facile de vérifier que pour tout réel $\lambda$ :*
$M(U + \lambda V)) = MU + \lambda MV$

Et donc :

Pour tout vecteur u de E, pour tout vecteur v de E, pour tout réel $\lambda$ :
$f(u + \lambda v)) = f(u) + \lambda f(v)$

Il faut retenir la proposition suivante :

**Proposition 10.1** *Toute matrice M $(a_{ij})_{i\leq n,j\leq p}$ définit une* ***unique application linéaire*** *f telle que les images par f des vecteurs de la base de E ont pour coordonnées dans la base de F les colonnes de M :*

$$f(b_j) =_{i=1}^{n} a_{ij}\beta_i$$

*Et inversement, étant donnés p vecteurs quelconques de F :$(b'_j)_{,j\leq p}$,il existe une et une seule application linéaire f telle que $f(b_j) = b'_j$*

**Ainsi,**

**une application linéaire est caractérisée par les images des vecteurs d'une base donnée**

**Preuve 10.2** *Vérification facile : Pour ne pas trop compliquer, prenons d'abord des exemples où* $E = F$ *:*

***Exemple 10.2*** $E = F = \mathbb{R}^3$ *muni de sa base canonique ; on donne* $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ :

*Alors tout vecteur* $u = (x, y, z)$ *est transformé par* $f$*, application linéaire associée, en* $u' = (x', y', z')$ *tel que* $U' = MU$ *avec* $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $U' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ *selon le même principe de calcul :* $x' = x + 2y + 3z$, $y' = -6x + 3y + 2z$, $z' = y + 5z$.

*Alors on voit facilement que les colonnes de la matrice donnent les images des vecteurs de la base :*

$f((1, 0, 0)) = (1, -6, 0)$, $f((0, 1, 0)) = (2, 3, 1)$, $f((0, 0, 1)) = (3, 2, 5)$.

***Définition 10.3*** *On dit que les expressions donnant les coordonnées de l'image d'un vecteur en fonction de celles de ce vecteur sont, relativement aux bases considérées, les formules analytiques de l'application linéaire.*

***Remarque 10.1*** *Attention : la matrice d'une application linéaire est une représentation de celle-ci dans des bases données de* $E$*, ensemble de départ, et* $F$ *ensemble d'arrivée ; si on change l'une des bases, la matrice change mais pas l'application linéaire...*

***Exemple 10.3*** *Soit* $f$ *l'application de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *qui à tout vecteur* $u$ *associe* $u' = 2u$ :

*Dans la base canonique de* $\mathbb{R}^2$*, la matrice de* $f$ *est :* $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *; dans une autre base, ce sera une autre matrice, on le verra plus loin...*

***Exemple 10.4*** *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(a, b, c) = (2a + b - 5c, 3a - 2b + c)$ : *La matrice de* $f$ *dans les bases canoniques de* $\mathbb{R}^3$ *et* $\mathbb{R}^2$ *est :*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

***Remarque 10.2*** *On peut pour obtenir cette matrice* :

*−Soit chercher les images des vecteurs de la base de* $E$ *donnée;*

*−Soit écrire* $f(a, b, c) = a(2, 3) + b(1, -2) + c(-5, 1)$.

Attention, il y a ici deux espaces différents et deux bases !

***Exemple 10.5*** *Ecrire la matrice de l'application linéaire g de* $\mathbb{R}_2[X]$ *muni de sa base canonique* $(1, X, X^2)$*, dans* $\mathbb{R}_1[X]$ *muni de sa base canonique* $(1, X)$*, telle que :*

$g(1) = 2 + 3X$ *;*
$g(X) = 1 - 2X$ *;*
$g(X^2) = -5 + X$ *; :*
*La matrice de g dans les bases canoniques de* $\mathbb{R}_2[X]$ *et* $\mathbb{R}_1[X]$ *est :*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

*C'est la même matrice que dans l'exemple précédent :*
*La seule donnée de la matrice ne permet pas de savoir dans quels espaces on travaille !*

***Exemple 10.6*** *Ecrire la matrice de l'application linéaire f de* $\mathbb{R}_2[X]$ *muni de sa base canonique* $(1, X, X^2)$*, dans* $\mathbb{R}_1[X]$ *muni de sa base canonique* $(1, X)$*, qui à un polynôme quelconque P associe la dérivée P' :*

*D'abord, vérifions ce qui est affirmé dans l'énoncé : pour tout polynôme* $P(X) = aX^2 + bX + c$*, on a* $P\prime(X) = 2aX + b$ *: P' appartient bien à* $\mathbb{R}_1[X]$*; ensuite la linéarité de la dérivation (justement !) nous permet de dire :*
$(\alpha P + \beta Q)' = \alpha P' + \beta Q'$ *: soit,* $f(\alpha P + \beta Q) = \alpha f(P) + \beta f(Q)$ *: f est bien linéaire.*
*Reste à chercher les images par f des vecteurs de la base* $(1, X, X^2)$ :
$f(1) = 0$*, en fait, le polynôme nul ;* $f(X) = 1$*,* $f(X^2) = 2X$ :
*La matrice M est relativement aux bases* $(1, X, X^2)$ *et* $(1, X)$ :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

***Remarque 10.3*** Remarquons donc que la seule donnée des images des vecteurs d'une base suffit à "interpoller", à définir une unique application **linéaire** f, c'est à dire à définir parfaitement $f(\overrightarrow{u})$, pour tout vecteur u ; comparons avec ce qui ce passe pour une application numérique f...

*La donnée de n points* $M_i(x_i, y_i)$ *du plan ne permet pas de définir une unique courbe qui passe par ces n points, et en général il n'existe pas de fonction linéaire f telle que* $f(x_i) = y_i$*, pour tout* $i \leq n$*; sauf si ces points sont alignés.*
*Le théorème est-il en défaut ?*
*Non : pour* $E = F = \mathbb{R}$
*On est en dimension 1, la donnée d'un point A(a ;b) permet bien de définir une unique fonction linéaire, celle dont le graphe est la droite (AB)*

# 11 Notion de rang

*Cette notion est centrale dans ce cours : elle permet de comprendre comment les diverses notions s'articulent entre elles...*

*Elle permet de répondre à la question suivante :*

Dans un système de plusieurs équations à plusieurs inconnues, combien d'équations sont réellement nécessaires ?

*De combien d'équations ai-je besoin pour résoudre le problème ?*

*En effet, si une des équations est liée aux autres (par exemple, la numéro 2 est la somme de la numéro 1 et de la numéro 3, la numéro 2 est superflue ; elle ne m'apporte aucun renseignement nouveau...*

*Ce problème aura une traduction matricielle : examinons le sous cet aspect :*

*Prenons donc une matrice de n colonnes et p lignes ; les n colonnes définissent n vecteurs de $\mathbb{R}^p$;posons la*

***Définition 11.1*** *On appelle rang d'une matrice de taille (p lignes, n colonnes) le nombre maximum de vecteurs colonnes libres.*

***Proposition 11.1*** *Le rang d'une matrice est la dimension du sous espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes...*

***Exemple 11.1*** *La matrice* $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ *est de rang 2 ; la matrice* $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$ *est de rang 1 ;*

***Exemple 11.2*** *La matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 7 & 2 & 72 \\ 3 & 4 & 34 \end{pmatrix}$ *est de rang 2 ; la matrice* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *est de rang 3 ; la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & -1 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ *est de rang 2...*

***Preuve 11.1*** *Facile (on met en évidence des relations entre les colonnes) sauf le dernier cas : montrons que les vecteurs colonnes $u = (0,0,1)$, $v = (0,1,1)$, $w = (1,1,1)$ sont libres, c'est à dire :*

*Pour tous réels $x, y, z$, si $xu + yv + zw = (0,0,0)$ alors $x = y = z = 0$ : on obtient : $z = 0$, $y + z = 0$, $x + y + z = 0$, ce qui conduit facilement à la conclusion.*

*Le calcul du rang se fera bientôt par méthode systématique... : on commence par trouver la valeur maximum et on "descend"...*

*A l'aide de ce qui précède, on pose naturellement la*

***Définition 11.2*** *On appelle rang d'une famille de n vecteurs le nombre maximum de vecteurs libres.*

*On peut aussi remarquer que le rang d'une famille de n vecteurs est la dimension du sous espace vectoriel engendré par ces vecteurs...*

***Remarque 11.1*** *Ainsi, le rang d'une famille de n vecteurs est au plus égal à n...*

# 12 Calcul matriciel

*Dans ce chapitre, l'ensemble des matrices n lignes, p colonnes est noté Mn,p($\mathbb{R}$)*
*Nous allons voir que les opérations sur les matrices vues au chapitre I se généralisent sans difficulté.*

*Cadre de travail :*

*Soient des espaces vectoriels E et F, munis chacun d'une base ; notons* $dimE = p$, $dimF = n$ :
*Base de E :* $(b_j)_{,j\leq p}$;*Base de F :* $(\beta_i)_{,i\leq n}$

## 12.1 Opérations sur les matrices

### 12.1.1 L'addition :

*Toute matrice M=*$(a_{ij})_{i\leq n,j\leq p}$ *définit une unique application linéaire f telle que les images par f des vecteurs de la base de E ont pour coordonnées dans la base de F les colonnes de M :*

$$f(b_j) =_{i=1}^{n} a_{ij}\beta_i$$

*Soit une matrice N=* $(a'_{ij})_{i\leq n,j\leq p}$ *définit une unique application linéaire g telle que les images par g des vecteurs de la base de E ont pour coordonnées dans la base de F les colonnes de M :*

$$g(b_j) =_{i=1}^{n} a'_{ij}\beta_i$$

***Proposition 12.1*** *Dans les conditions précédentes, f+g est une application linéaire*

***Preuve 12.1*** *Facile*

***Définition 12.1*** *Par définition, M+N est la matrice de f+g ; c'est* $((a_{ij} + a'_{ij})_{i\leq n,j\leq p}$

### 12.1.2 La multiplication par un scalaire :

*Pour tout scalaire k,*

***Proposition 12.2*** *Dans les conditions précédentes, kf est une application linéaire, et par définition, kM est la matrice de kf ; c'est* $((ka_{ij})_{i\leq n,j\leq p}$

### 12.1.3 La multiplication de deux matrices :

*Il nous faut ici composer des applications linéaires :*
*Soient des espaces vectoriels E, F, G munis chacun d'une base ; notons* $dimE = p$, $dimF = m, dimG = n$
*Soit M une matrice, M=*$(a_{jk})_{j\leq m,k\leq p}$ *définit une unique application linéaire f de E dans F*
*La matrice M comporte m lignes et p colonnes*
*Soit N une matrice, N=*$(b_{ij})_{i\leq n,j\leq m}$ *définit une unique application linéaire g de F dans G*
*La matrice N comporte n lignes et m colonnes*

***Proposition 12.3*** *Dans ces conditions, la composée $g \circ f : E \to G$ est une application linéaire de E dans G, et par définition, NM est sa matrice dans les bases données de E et G*

*La matrice NM comporte n lignes et p colonnes*
*Ainsi :*

$$N \text{ est une matrice}(n,m), M \text{ est une matrice}(m,p), NM \text{ est une matrice}(n,p)$$

***Preuve 12.2*** *Facile*

***Remarque 12.1*** *Le produit matriciel AB est possible si le nombre de colonnes de A est le même que celui de lignes de B*

***Exemple 12.1*** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

### 12.1.4 L'inverse d'une matrice carrée

***Définition 12.2*** *Une matrice carrée M est inversible si il existe une matrice notée $M^{-1}$ telle que $MM^{-1} = I$*

*On a facilement :*
*Soient des espaces vectoriels E et F, munis chacun d'une base ; notons $dimE = dimF = n$ :*
*Si f est un isomorphisme, alors la matrice $M^{-1}$de $f^{-1}$ vérifie $MM^{-1} = I$*
*Méthodes pour trouver $M^{-1}$, si elle existe :*
*On détaillera ce point plus loin, indiquons que l'on peut travailler sur les formules analytiques et les inverser si possible...*

***Exemple 12.2*** *M*= $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

*On a facilement :* $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *E étant un espace vectoriel de dimension 3, muni d'une base, on a la*

***Définition 12.3*** *On appelle déterminant de ma matrice* $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ *le réel, noté* *DetM*=$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \langle \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} \mid \overrightarrow{u} \rangle$

$$DetM = a(ei - fh) - d(bi - ch) + g(bf - ec)$$

***Remarque 12.2*** *La définition de déterminant de matrice permet d'étendre celle de déterminant de vecteurs dans tout espace de dimension 3.*

*Remarquons que l'on peut mettre en évidence des déterminants d'ordre 2 :*
*En effet,* $ei - fh = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$, *et ainsi, on a une autre écriture du déterminant :*
$DetM = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a(\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}) - d(\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}) + g(\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix})$ :
*Il apparaît que la première colonne joue un rôle particulier ; on dit que les déterminants* $\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$ *sont les* mineurs *associés respectivement à : a, d, g.*

***Exemple 12.3*** *Le déterminant de la matrice identité vaut 1.*

***Définition 12.4*** *On appelle déterminant d'un système de 3 vecteurs le déterminant de la matrice formée par les vecteurs colonnes.*

***Proposition 12.4*** *En pratique, on a le résultat suivant : le déterminant d'un produit de matrices MN est le produit des déterminants :*

$$Det(MN) = DetM.DetN$$

***Proposition 12.5*** *Une matrice carrée d'ordre 3 est de rang 3, c'est à dire inversible, si son déterminant est non nul.*

***Preuve 12.3*** *Si M est inversible, alors* $MM^{-1} = I$,*donc* $Det(MM^{-1}) = 1 = (DetM).Det(M^{-1})$ :*donc* $DetM \neq 0$;*de plus,*

$$Det(M^{-1}) = (DetM)^{-1}$$

*Réciproquement, voici une idée de preuve : il faut montrer que le système* $MX = X\prime$ *a, pour un vecteur X' donné une unique solution X, ce qui n'est pas trop difficile en dimension 3...*

# 13 Matrice échelonnée

*On a vu que certaines matrices sont plus faciles que d'autres : les matrices triangulaires par exemple ;*

*L'idée est alors la suivante : pour déterminer le rang d'une matrice, essayons de la transformer en une autre matrice de même rang...*

*Donnons ces définitions :*

***Définition 13.1*** *Le premier élément non nul d'une ligne d'une matrice s'appelle* élément distingué. *Si une ligne est nulle, elle ne comporte pas d'élément distingué.*

***Définition 13.2*** *Une matrice est dite* échelonnée *si les conditions suivantes sont* réalisées :

*- si la ligne $L_i$ est une ligne nulle, toutes les lignes $L_{i'}, i' > i$, sont nulles.*

*- si pour chaque élément distingué $a_{ij}$, les autres termes "au dessous" $a_{i'j}, i' > i$,de la même colonne $j$ sont nuls.*

*- il y a un seul élément distingué par ligne ;*

*Dans ce cas, les éléments distingués sont appelés "PIVOTS"*

***Définition 13.3*** *Si une matrice est* échelonnée *et qu'en plus, chaque élément distingué vaut 1 et c'est le seul élément non nul de sa colonne, alors on dit que la matrice est* échelonnée réduite.

***Exemple 13.1*** *les matrices suivantes sont* échelonnées :

$M = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 & -3 & 4 & 8 & 3 \\ 0 & \mathbf{5} & 6 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{7} & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ ; *les pivots (ou éléments distingués) sonts :* $1, 5, 7, -1$;

*Le rang de $M$ est 4 ;*

$N = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ : *$N$ est* échelonnée réduite : *les pivots sonts :* $1, 1, 1$;*le rang de $N$ est 3.*

Comment transformer une matrice en une matrice échelonnée et dans quel but ?

# 14 Algorithme de réduction d'une matrice à une matrice échelonnée

*Etape 1 : appeler $j_1$ la première colonne comportant un élément $a_{ij_1}$ non nul; choisir $a_{ij_1} = 1$ si possible.*

*Etape 2 : échanger les lignes 1 et i pour que cet élément apparaisse dans la première ligne ; premier pivot : $a_{1j_1}$*

*Etape 3 : faire la transformation de ligne : $L_i \leftarrow L_i - \dfrac{a_{ij_1}}{a_{1j_1}} L_1$; pour chaque $i > 1$*

*Etape 4 : répéter les étapes 1,2,3 avec la sous matrice formée par toutes les lignes sauf la première.*

***Exemple 14.1*** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 7 & -2 & 2 \\ 3 & 10 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

*Le premier pivot est 1 :*
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1; L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1;$
*Le deuxième pivot est 3 :*

$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & -3 & 0 \\ 0 & \mathbf{3} & 4 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - \frac{4}{3} L_2$
*La matrice est échelonnée.*

## 14.1 Matrices équivalentes

***Définition 14.1*** *Une matrice A est dite équivalente à une matrice B si B est obtenue en faisant subir à A les transformations suivantes dites élémentaires sur les lignes ou les colonnes :*

1. *Echanger deux lignes* $L_i \leftrightarrow L_{i'}$
2. *Multiplier la ligne* $L_i$ *par* $\lambda$ : $L_i \leftarrow \lambda L_i$
3. *Remplacer la ligne* $L_i$ *par* $L_i$+ $kL_i$

*(De même pour les colonnes)*

## 14.2 Matrices élémentaires

*On va maintenant interpréter les notions de matrices équivalentes à l'aide de matrices élémentaires et de produit matriciel ; alors, ce qui apparaissait comme "magique" trouvera une explication très simple...*

*Soit e une transformation élémentaire sur les lignes de la matrice identité* $In$ *(respectivement, f une transformation élémentaire sur les colonnes) :*
*On note* $\Gamma = e(I)$ *et* $\Omega = f(I)$
*On dit que* $\Gamma$ *est la* matrice élémentaire *associée à la transformation élémentaire e sur les lignes de* $I$ *;*
*On dit que* $\Omega$ *est la* matrice élémentaire *associée à la transformation élémentaire f sur les colonnes de* $I$ *;*

***Proposition 14.1*** *On a pour une même transformation élémentaire :* $\Gamma$ *est la transposée de* $\Omega$.

***Exemple 14.2*** *Soit la transformation : e :* $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$*;donc f :* $C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1$

$$\text{On a } In = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Gamma^t$$

***Exemple 14.3*** *Soit la transformation :* $L_2 \leftarrow 2L_2$*; donc f :* $C_2 \leftarrow 2C_2$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Omega \text{ car } \Gamma \text{ est symétrique dans ce cas ;}$$

***Exemple 14.4*** *Soit la transformation :* $L_2 \leftarrow L_3$ *: donc f :* $C_2 \leftarrow C_3$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \Gamma \text{ car } \Gamma \text{est symétrique dans ce cas ;}$$

## 14.3 Propriétés des matrices élémentaires

*On a les résultats très importants :*

***Proposition 14.2*** *Toute* matrice élémentaire est inversible

***Preuve 14.1*** *Une transformation élémentaire sur les colonnes de la matrice identité est un isomorphisme car elle transforme une base en une base ; comme pour une même transformation élémentaire* $\Gamma$ *est la transposée de* $\Omega$*, le même raisonnement s'applique pour transformation élémentaire sur les lignes de la matrice identité.*

***Proposition 14.3*** *Soit e une transformation élémentaire sur les lignes d'une matrice A, m lignes n colonnes : soit* $\Gamma_m = e(I_m)$ *: alors* $e(A) = \Gamma_m A$

***Proposition 14.4*** *Soit f une transformation élémentaire sur les colonnes d'une matrice B, p lignes m colonnes : soit* $\Omega_m = f(I_m)$ *: alors* $f(B) = B\Omega_m$

*Ainsi, il est facile de comprendre qu'une succession de transformations élémentaires sur les lignes (respectivement colonnes) d'une matrice revient à multiplier celle-ci à gauche (respectivement à droite) par un produit P de matrices élémentaires ; et donc :*

***Proposition 14.5*** *Une matrice A est ligne-équivalente (respectivement colonne-équivalente) à une matrice N de même taille s'il existe une matrice P produit de matrices élémentaires telles que* $N = PA$ *(respectivement* $N = AQ$*)*

***Théorème 14.1*** *Deux matrices équivalentes sont de même rang r : c'est le nombre de pivots.*

***Preuve 14.2*** *très facile : cela découle directement de l'inversibilité d'une matrice élémentaire...*

*On va utiliser ces résultats pour le calcul de de rang de matrices et de déterminants :*
*-On cherche une matrice échelonnée équivalente pour trouver le rang ;*
*-On utilise les propriétés des déterminants pour transformer un déterminant en un autre échelonné, pas forcément égal :*

***Exemple 14.5*** *Quel est le rang des vecteurs* $U = (1, 2, 1, -3), V = (2, 1, 3, 4), W = (-1, -1, 2, 3), Y = (1, 1, 2, 1)$? *quel est le déterminant de ces vecteurs ?*

*Une matrice échelonnée équivalente à* $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ *s'obtient petit à petit :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 0 & 4 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_1 \end{array} \right. :$$

*puis :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} L_3 \leftarrow L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4/2 \end{array} \right. :$$

*puis :* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 5L_2 \end{array} \right. : \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & -15 & -3 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} L_3 \leftarrow L_3/2 \\ L_4 \leftarrow L_4/3 \end{array} \right. :$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \end{pmatrix}$, *puis,* $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$ : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ :

*Donc :*
*Le rang du système est égal à 3 et le déterminant est nul.*

***Exemple 14.6*** *Calculer le déterminant :* $D = \begin{vmatrix} 5 & 10 & 15 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 12 & -3 \end{vmatrix}$ :

$$D = 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 12 & -3 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & -9 \end{vmatrix} = 5(-45 - 8) = -265$$

*On utilise aussi le résultat pratique suivant :*

***Proposition 14.6*** *Toute matrice de rang r est équivalente à une matrice "par blocs" :* $I_r$ *étant la matrice identité d'ordre r :* $\begin{pmatrix} I_r & \text{bloc nul} \\ \text{bloc nul} & \text{bloc nul} \end{pmatrix}$

# 15 Systèmes linéaires d'équations

Nous allons à présent utiliser les chapitres précédents pour résoudre des systèmes linéaires d'équations ; certains ouvrages placent ce chapitre en premier : cela signifie que d'un point de vue purement technique, il est possible de résoudre des systèmes linéaires sans le support théorique de l'algèbre linéaire ; mais, pour aller au fond des choses, pour comprendre les articulations des notions entre elles, il est préférable de placer ce chapitre à la suite des autres.

*OBJECTIF :* Résoudre des systèmes linéaires à n équations et p inconnues du type *:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{21}x_2 + ...a_{2p}x_p = b_2 \\ \\ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ...a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

*Soit, avec une simple écriture matricielle :*

$$AX = B$$

*Où* $A$ *est une matrice* $(a_{ij})_{i \leq n; j \leq p}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ ... \\ x_p \end{pmatrix}$ *est le vecteur inconnu, et* $B$ *le second membre :* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$ *: second membre ;* $A$ *: matrice des coefficients*

*D'abord un résultat théorique essentiel :*

***Théorème 15.1*** *Le système linéaire à n équations et p inconnues* $AX = B$ *a une et une seule solution si et seulement si la matrice* $A$ *est carrée et inversible ; cette solution est donnée sous forme de vecteur colonne par*

$$X = A^{-1}B$$

***Preuve 15.1*** *Evidente à l'aide des chapitres précédents.*

*En pratique :*
*- Comment trouver cette unique solution dans ce cas ?*
*- Comment faire dans tous les autres cas ?*

# 16 Résolution par méthode des matrices échelonnées

*Voici comment on procède :*

*Comme les systèmes les plus simples sont ceux qui sont triangulaires, on utilise la méthode des matrices échelonnées ; plus précisément :*

*On écrit successivement des systèmes équivalents au premier en utilisant la "matrice augmentée du système :*

*C'est la matrice M ayant une colonne de plus que la matrice A, la colonne second membre.*

*On réduit alors la matrice M à une matrice échelonnée et on utilise les pivots :*

*La justification de cette méthode vient du fait qu'appliquer une transformation élémentaire sur la matrice M revient à l'appliquer sur les lignes du système ; le système admet au moins une solution si et seulement si la matrice augmentée échelonnée ne contient pas la ligne* $(0, 0, 0, ...., 0, b_i)$, *avec* $b_i \neq 0$.

***Exemple 16.1*** $\left\{\begin{array}{c} x+y-2z+4t=1 \\ 2x+2y-3z+t=3 \\ 3x+3y-4z-2t=1 \end{array}\right.$

*La matrice augmentée est :*

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \left\{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array}\right.$

*équivalente à :* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & -2 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$

*équivalente à :*

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ :

*Ce système n'a pas de solution.*

***Exemple 16.2*** $\left\{\begin{array}{c} x+y-2z+4t+u=1 \\ 2x+2y-3z+t+2u=3 \\ 3x+3y-4z-2t+\alpha u=5 \end{array}\right.$

*La matrice augmentée est :*

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & \alpha & 5 \end{pmatrix} \left\{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array}\right.$ *équivalente à :*

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & \alpha-3 & 2 \end{pmatrix}$ *équivalente à :* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-3 & 0 \end{pmatrix}$

*On discute alors selon* $\alpha$ :

*Premier cas :*

$\alpha = 3$

*Il y a 2 pivots,* $r = 2$;

*Alors L3 est vraie quelque soit u ;*

*On obtient :*

$$\begin{cases} x+y-2z+4t=1 \\ z-7t=1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x=-y+10t+3 \\ z=7t+1 \end{cases}$$
*Les variables y, t, u sont arbitraires*

*On a* $n=3$, $p=5$, $r=2$ :

*Les variables y , t et u sont dites* variables libres *(elles prennent toutes les valeurs réelles) :* $p-r$ *est le nombre de variables libres.*

*Les autres variables x et z (il y en a donc r) sont appelées "*inconnues principales*".*

*Remarquons que le rang de la matrice augmentée M est 2 ; c'est le nombre d'inconnues principales, devant les pivots*

*Les pivots sont "1" en colonne 1 et "1" en colonne 3 :*

*Ce sont les colonnes des inconnues principales x et z.*

*Deuxième cas :*

$\alpha \neq 3$ :

*Il y a 3 pivots,* $r=3$

*On obtient :*
$$\begin{cases} x+y-2z+4t=1 \\ z-7t=1 \\ u=0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x=-y+10t+3 \\ z=7t+1 \\ u=0 \end{cases}$$
*Les variables y, t sont arbitraires*

*On a* $n=3$, $p=5$, $r=3$ :

*Les variables y , t sont dites* variables libres *(elles prennent toutes les valeurs réelles) :* $p-r$ *est le nombre de variables libres.*

*Les autres variables x , z et u (il y en a donc r) sont appelées "*inconnues principales*".*

## 16.1 Méthode du pivot de Gauss

***Cette méthode se généralise et s'appelle "méthode du pivot de Gauss" :***

*L'algorithme consiste pour chaque pivot* $a_{IJ}$ *à remplacer chaque ligne* $L_i$ $, i \geq I$ *par* $L_i - \frac{a_{iJ}}{a_{IJ}} L_I$

***Remarque 16.1*** *On préfère, quand ces calculs donnent trop de dénominateurs, multiplier des lignes par des coefficients convenables et ne pas appliquer strictement la méthode du pivot de Gauss.*

*Par exemple : si le pivot dans* $L_1$ *est 2 , et que* $L_2$ *commence par "3", on pourra faire la transformation :*

$L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1$

*On trouve l'algorithme détaillé dans de nombreux ouvrages et dans de nombreux cours sur internet : il suffit de taper "pivot de Gauss"...*

***Proposition 16.1*** *Dans un système linéaire à n équations et p inconnues, le nombre r d'inconnues principales est le rang de la matrice augmentée ; il y a alors p-r variables libres, indéterminées à l'aide desquelles s'expriment les r inconnues principales.*

*Voyons un exemple encore :*

***Exemple 16.3*** *Soit le système* $\left\{\begin{array}{c} x-y+z=2 \\ 2x+y-z=1 \\ 4x+3y+z=3 \end{array}\right.$ :

*La matrice augmentée est :*
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \left\{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array}\right.$ *équivalente à :* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{3}L_2$

*équivalente à :* $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{3} & -3 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{4} & 2 \end{pmatrix}$ :

*Le rang de la matrice est 3 : il y a 3 inconnues principales x, y et z.*
*Soit :* $4z = 2 : z = \frac{1}{2}$ *;* $y - z = -1 : y = -\frac{1}{2}; x - y + z = 2 : x = 1$
*Le système admet l'unique solution :*

$$S = \{(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$$

# 17 Cas des systèmes homogènes

*Voyons particulièrement les systèmes homogènes : ceux du type* $AX = O$ *:*

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...a_{1p}x_p = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{21}x_2 + ...a_{2p}x_p = 0 \\ \\ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ...a_{np}x_p = 0 \end{array}\right. :$$

*Remarquons que ces systèmes ont toujours au moins la solution nulle ; on va voir que l'on est en mesure non seulement de savoir si c'est la seule solution, mais aussi, dans le cas contraire, de donner une base de l'espace vectoriel des solutions :*

***Proposition 17.1*** *Les solutions d'un système homogène forment un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^p$

***Preuve 17.1*** *Vérification facile : si X et Y sont des vecteurs solutions, alors* $X + Y$ *;* $\lambda X$ *est aussi solution (d'où le nom de système linéaire...*

*Ou bien, encore plus rapide, les solutions constituent le noyau d'une application linéaire de* $E = \mathbb{R}^p$ *dans* $F = \mathbb{R}^n$ *: celle dont la matrice est la matrice du système ; on va aller un peu plus loin...*

*Le théorème suivant permet de trouver facilement une base de l'espace vectoriel des solutions :*

***Théorème 17.1*** *Les solutions d'un système homogène* $AX = 0$ *forment un espace vectoriel S de dimension égal au nombre de variables libres ; si r est le rang du système, p le nombre d'inconnues, les solutions forment un espace vectoriel de dimension* $p - r$ *; c'est le nombre de variables libres, les autres sont les r inconnues principales. On obtient une base de cet espace de solutions en posant par exemple successivement chaque variable libre égale à 1, et et les autres variables libres nulles.*

***Preuve 17.2*** *On a en effet le théorème du rang :* $dimKerf = \dim E = p - rangf = p - r$;*comme ce noyau représente l'espace vectoriel des solutions, on a le résultat annoncé...*

*Ainsi, la détermination du rang du système permet de savoir quel type de solutions on va trouver ;*

*En particulier :*

***Remarque 17.1*** - Si le système est carré ($n$ équations, $n = p$ inconnues) et de rang $r = n$ : autrement dit si le déterminant du système est non nul : l'espace vectoriel des solutions est de dimension nulle : on le savait, seul le vecteur nul est solution !

- - Si le système a plus d'inconnues p que d'équations n, alors $r \leq n < p$ : donc $p - r \neq 0$ : Un tel système admet toujours d'autres solutions que la solution nulle car dimS$\geq$ 1...

***Exemple 17.1*** Cherchons les solutions et une base des solutions du système :

$$\begin{cases} x + y - 2z + 4t = 0 \\ 2x + 2y - 3z + t = 0 \\ 3x + 3y - 4z - 2t = 0 \end{cases}$$

*On obtient le système échelonné équivalent en reprenant des calculs déjà faits :*

$$\begin{cases} x + y - 2z + 4t = 0 \\ z - 7t = 0 \end{cases}$$

*D'où : le rang est 2 ; donc les solutions forment un espace de dimension* $4 - 2 = 2$ *:*

*Il y a 2 variables libres, et 2 inconnues principales que l'on peut prendre comme premières de leur ligne : x et z.*

*Ce sont celles où dont les pivots sont les coefficients.*

*Alors t et y sont variables libres et :*

$z = 7t$ *;* $x = -y + 10t$

*Pour trouver une base (U,V) des solutions du système, posons* $y = 1$ *et* $t = 0$ *:*

$U = (-1, 1, 0, 0)$

*Puis, posons* $t = 1$ *et* $y = 0$ *:*

$V = (10, 0, 7, 1)$ :

*On conclut :*

*Les solutions du système sont définies par le plan vectoriel de base* $U = (-1, 1, 0, 0)$ $V = (10, 0, 7, 1)$

*Ce sont les combinaisons linéaires de* $U$ *et de* $V$ *:*

$$S = \{W(-y + 10t, y, 7t, t); y \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}$$

*On peut aussi trouver une base par d'autres méthodes :*

$\begin{cases} x = -y + 10 \\ y = y \\ z = 7t \\ t = t \end{cases}$ *d'où les vecteurs* $U(-1, 1, 0, 0)$ *;* $V(10, 0, 7, 1)$, *et*

$$S = \{W(x, y, z, t), W = yU + tV\}$$

*Dans un système linéaire $AX = B$ :*

| *Nb d'équations* | *Nb d'inconnues* | *Rang : nb de pivots* | *Var. libres* | *Inc. principales* |
|---|---|---|---|---|
| $n$ | $p$ | $r$ | $p - r$ | $r$;*devant les pivots* |

*- Un seul cas de solution unique : si $n = p = r$, c'est à dire $A$ carrée et inversible : $DetA \neq 0$.*

*- On échelonne la matrice augmentée et on exprime les $r$ inconnues principales en fonction des $p - r$ variables libres.*

*- De plus si le système est homogène ($AX = 0$), les solutions forment un espace vectoriel $S$ de dimension $p - r$ :*

*C'est le noyau d'une application linéaire $f$ de $E$, $dimE = p$, dans $F$, $dimF = n$, de matrice $A$ dans des bases données :*

$$DimKerf = p - r$$

*- Les colonnes de A-il y en a autant que la dimension de E- sont les composantes d'une famille génératrice de Imf, espace vectoriel de dimension $r$ :*

$$Imf = Vect(C_i)_{i \leq n}$$

*On a le théorème du rang :*

$$DimKerf + DimImf = DimE$$

# 18 TD : Matrices carrées d'ordre 2

***exercise 18.1*** *Soit la suite telle que :* $U_0 = U_1 = 1; U_{n+1} = U_n + U_{n-1}$ *Soit la matrice* $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, V_n = \begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \end{pmatrix}, V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$V_{n+1} = MV_n$$

*Calculer à l'aide de* $V_0, V_1, V_2$*... les puissances successives de la matrice* $M^2, M^3, M^4$ *sans utiliser la technique de multiplication de matrices, puis, vérifier par cette méthode le calcul ; on utilisera* $V_2 = M^2V_0, V_3 = M^2V_1$

***exercise 18.2*** *Soit une matrice quelconque* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

*On définit la* trace *de la matrice le réel :* $tr(A) = a + d$ *(somme des éléments de la diagonale), et le* déterminant *de la matrice le réel* $det(A) = ad - bc$ *: montrer que l'on a la relation :*

$$A^2 - tr(A)A + det(A)I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Vérifier cette relation sur la matrice* $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$*, sur la matrice* $A\prime = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$...

***exercise 18.3*** *Une méthode efficace de calcul de puissance de matrice...objectif : connaître l'évolution de la fameuse population* $U_n$ *de lapins...*

*Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *dont on se propose de calculer les puissances :*

*1) Ecrire la relation* $A^2 - tr(A)A + det(A)I$ *pour cette matrice ;*

*2) On note P(X) le polynöme* $P(X) = X^2 - X - 1$ *: résoudre* $P(X) = 0$.

*La division euclidienne de* $X^n$ *par* $P(X)$ *donne la relation* $X^n = P(X)Q_n(X) + R_n(X)$ :

*Quel est le degré de* $R_n(X)$ *? On note* $R_n(X) = a_nX + b_n$ *:Calculer alors* $R_n(X)$ *en utilisant les solutions* $\varphi$ *et* $\varphi'$ *de* $P(X) = 0$*, sans calculer* $Q_n(X)$ *;*

*3) Montrer que* $A^n = a_nA + b_nI$

*4) Expliciter alors* $A^n$ *: le problème des puissances de A est résolu...du même coup :*

*5) Montrer que* $U_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{n+1}$*. Quelle est la limite du rapport* $\frac{U_{n+1}}{U_n}$?

***exercise 18.4*** *Pour tout réel* $\theta$*, on pose la matrice* $M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ :

*1) Montrer que* $M(\theta + \theta') = M(\theta)M(\theta')$*, pour tous réels* $\theta, \theta'$.

*2) Quelle est la matrice M(*0)?

*3) Montrer que* $M(\theta)$ *est une matrice inversible, quelle est* $(M(\theta))^{-1}$?

*4) Calculer* $(M(\theta))^2$*,montrer que* $(M(\theta))^2 = M(2\theta)$*, puis par récurrence que* $(M(\theta))^n = M(n\theta)$

*5) On pose* $V = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ *: calculer le produit* $M(\theta)V$*; interpréter géométriquement.*

*6) On pose* $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$*, pour a et b réels quelconques :*

*Montrer que l'on peut toujours trouver un réel* $k > 0$ *et* $\theta$ *tels que* $A = kM(\theta)$

*Application : calculer* $A^n$ *pour* $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ *; vérifier en calculant directement* $A^2$, $A^3$.

$\boxed{\textit{Solutions exercises TD matrices ordre 2}}$

$V_2 = MV_1 = M^2V_0$; *on pose* $M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, *on identifie et on trouve facilement avec* $V_2 = M^2V_0$ *et* $V_3 = M^2V_1$

$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; *de même* $M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

*Calcul facile*

*1) On a la relation* $A^2 - A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

*2) Le polynöme* $P(X) = X^2 - X - 1$ *a pour solutions* $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$ *et* $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \varphi'$

*La division euclidienne de* $X^n$ *par* $P(X)$ *donne la relation* $X^n = P(X)Q_n(X) + R_n(X)$ : *le degré de* $R_n(X)$ *est 0 ou 1 : on peut poser* $R_n(X) = a_nX + b_n$

*En remplaçant X par* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *et* $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, *on trouve :* $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n = a_n\frac{1+\sqrt{5}}{2} + b_n = a_n\varphi + b_n$ *et* $(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n = a_n\varphi' + b_n$ :

*D'où* $a_n = \dfrac{\varphi^n - \varphi'^n}{\varphi - \varphi'}$, *et* $b_n = \dfrac{\varphi\varphi'^n - \varphi'\varphi^n}{\varphi - \varphi'}$

*3) On a* $A^n = a_nA + b_nI$ *car* $P(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

*4) Ainsi, on a* $A^n = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ a_n & a_n + b_n \end{pmatrix}$

*5) La population de lapins le mois n est* $U_n$ ; *elle équivaut à* $\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{n+1}$ *quand n tend vers l'infini, car :*

$V_n = \begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \end{pmatrix} = A^nV_0 = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ a_n & a_n + b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

*Donc :* $U_n = a_n + b_n$ :

*Comme* $|\varphi'| < 1, \lim \varphi'^n = 0$ :

*On alors* $U_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{n+1}$, *et surtout, le rapport* $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ *tend vers* $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, *le nombre d'or.*

*1) On utilise les relations d'addition sin(a + b) et cos(a + b) 2) La matrice* $M(0)$ *est* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

*3)* $M(\theta)$ *est une matrice inversible car son déterminant vaut 1; on peut alors calculer l'inverse par application de la formule du cours, ou plus rapidement :*

*comme* $M(\theta).M(-\theta) = M(0) = I$ :

$M(\theta)$ *est une matrice inversible et*

$(M(\theta))^{-1} = M(-\theta)$.

*4)* $(M(\theta))^2 = M(\theta+\theta) = M(2\theta)$; *la récurrence est facile en utilisant la question 1).*

*5) Le produit* $M(\theta)V$ *est égal à* $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\theta) \\ \sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix}$

*Ainsi, on comprend pourquoi M est la matrice d'une rotation vectorielle d'angle* $\theta$.

*6)* $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = kM(\theta)$ *si, par identification,* $a = kcos\theta$ *et* $b = ksin\theta$ : *on obtient* $k = \sqrt{a^2+b^2}$ *et* $\theta$ *à l'aide de* $tan\theta = \dfrac{b}{a}$, *si a est non nul; si a est nul, on a* $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

$$Pour\ A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix},\ on\ a\ A = 2M(\frac{\pi}{3})\ donc\ A^n = 2^n M(n\frac{\pi}{3})...$$

# 19 exercises espaces vectoriels, bases...

***exercise 19.1*** *Vérifier que le système (u,v,w) est une base de* $\mathbb{R}^3$ : $u = (0,1,1), v = (1,0,1), w = (0,0,1)$

*de deux méthodes différentes (famille libre, famille génératrice...) on verra encore d'autres méthodes plus tard...*

*Décomposer le vecteur* $U = (2,3,-1)$ *dans la base canomique de* $\mathbb{R}^3$*et dans cette base.*

***exercise 19.2*** *Les sous ensembles suivants de* $\mathbb{R}^3$ *(ou* $\mathbb{R}^4$*) sont-ils des sous espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$*? si oui, en donner une base :( ne pas utiliser la définition générale d'un espace vectoriel...)*

*On utilisera pour cela le cours : l'ensemble des combinaisons linéaires formées à partir des vecteurs d'une famille constitue un sous espace vectoriel; comment nomme t-on ce sous espace ?*

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, tel\ que\ x+y=0\ et\ 2x-y+z=0\}$ *; interprétation géométrique.*

$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, tel\ que\ x-y+z=0\ et\ x-y-z=1\}$*(réponse rapide...)*

$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, tel\ que\ 2x+y+3z=0\}$*interprétation géométrique;*

$I = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, tel\ que\ x+y=0,\ et\ 2x-y+t=0\}$

***exercise 19.3*** *Montrer que le sytème* $U = (1, 1+X, 1+X^2)$ *est une base de l'espace* $\mathbb{R}_2[X]$. *Quelles sont, dans la base canonique et dans cette base, les coordonnées de* $P(X) = X^2+X$*? de* $Q(X) = X$ *? de* $R(X) = 2X^2 - X - 1$*?*

***exercise 19.4*** *Que signifie la phrase : "F est le sous espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs U" ? Donner plusieurs réponses. Pourquoi toute famille V contenant les éléments de U est-elle aussi génératrice ?*

***exercise 19.5*** *Montrer que la famille* $V = \{(1,1,1,0),(1,1,0,0),(0,1,0,0)\}$ *est une famille libre de* $\mathbb{R}^4$; *est -elle génératrice ?*

***exercise 19.6*** *1) A l'aide des déterminants, dire si les systèmes suivants de vecteurs forment une base de* $\mathbb{R}^3$ :

*a)* $u = (1,0,2); v = (-1,3,1); w = (2,1,5)$

*b)* $u\prime = (1,1,3); v\prime = (-1,3,0); w\prime = (2,0,0)$

*c)* $u = (1,3,0); v = (-2,1,1); w = (-4,9,3)$

$\boxed{\textit{Solutions TD espaces vectoriels, bases...}}$ ***Pour bien comprendre...***

*Il y a une difficulté en algèbre linéaire : les ensembles dans lesquels on travaille sont divers et variés ; il importe avant toute chose de bien se repérer : quel est l'espace vectoriel, quels sont ses éléments, quel est l'élément neutre , savoir faire la distinction entre vecteurs et coordonnées etc ; un tableau simple pour faire le point :*

| | | |
|---|---|---|
| *Espace E :* | $\mathbb{R}^3$; *élément neutre : (0,0,0)* | $\mathbb{R}_2[X]$ *neutre : polynôme nul* |
| *Vecteur u de E :* | $u = (x, y, z)$ | $u = aX^2 + bX + c$ |
| *Base canonique B :* | $B = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ | $B = (1, X, X^2)$ |
| *Coordonnées de u dans B :* | $(x, y, z)$ | $(c, b, a)$ |

*Ainsi dans* $\mathbb{R}^3$, *(ou* $\mathbb{R}^n$*) un vecteur* $u = (x, y, z)$ *est confondu avec ses composantes dans la base canonique ; mais dans les autres espaces vectoriels, ce n'est pas la même chose :* $aX^2 + bX + c \neq (c, b, a)$

*Une base de E,espace vectoriel de dimension n : c'est une famille libre de n vecteurs ; c'est une famille génératrice de n vecteurs ; c'est une famille libre et génératrice ; c'est une famille U telle que tout vecteur de E se décompose de manière unique sur les vecteurs de U.*

*On peut montrer que la famille est libre :*

*Si* $\alpha u + \beta v + \gamma w = (0, 0, 0)$ *alors on a en identifiant après développement :* $\beta = 0; \alpha = 0; \alpha + \beta + \gamma = 0$ :

*Donc c'est une famille libre de 3 vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *: c'est une base.*

*Pour avoir les coordonnées de* $U = (2, 3, -1)$ *la base canonique : ce sont : 2,3,-1 ;*

*Dans la base (u,v,w), on écrit :* $U = \alpha u + \beta v + \gamma w = (\beta; \alpha; \alpha + \beta + \gamma) = (2, 3, -1)$ *et on trouve facilement* $\alpha, \beta, \gamma$.

*On écrit autrement F : le système* $x + y = 0$ *et* $2x - y + z = 0$ *équivaut à :*

$\begin{cases} y = -x \\ z = -3x \end{cases}$, *x est indéterminé, il est quelconque.*

*Donc : (x, y, z) appartient à F si et seulement si :* $(x, y, z) = (x, -x, -3x) = x(1, -1, -3)$

*Donc F est le sous espace vectoriel engendré par le vecteur* $u = (1, -1, -3)$

*Un vecteur non nul est toujours libre :*

*F est une droite vectorielle, la droite de base (u),* $u = (1, -1, -3)$

*F est l'ensemble des vecteurs colinéaires à u.*

*G n'est pas un espace vectoriel car il ne contient pas l'élément neutre (0,0,0).*

*H : On écrit autrement H :* $2x + y + 3z = 0$ *équivaut à*

$\begin{cases} x = x \\ y = -2x - 3z \\ z = z \end{cases}$ *cela veut dire que x et z sont indéterminés, il n'y a pas de condition sur eux ; alors, y vaut* $y = -2x - 3z$

*On a facilement (x, y, z) appartient à F si et seulement si :* $(x, y, z) = x(1, -2, 0) + z(0, -3, 1)$ :

*Donc H est le sous espace vectoriel engendré par les vecteurs* $u = (1, -2, 0)$ *et* $v = (0, -3, 1)$

*H est de dimension 2 parce que la famille (u,v), génératrice de H, est aussi libre :*

*2 vecteurs non colinéaires sont toujours libres.*

*Remarque : on a choisi d'écrire y en fonction de x et z ; deux autres choix étaient possibles, et auraient donné deux autres bases de H.*

*On procède de même pour I.*

*On montre :*

*soit que c'est une famille libre de 3 vecteurs de* $\mathbb{R}_2[X]$ *: c'est une base.*

*soit que c'est une famille génératrice de 3 vecteurs, c'est mieux ici car cela donne la réponse à la question suivante :*

*Soit* $A(X) = aX^2 + cX + c$ *: ses coordonnées dans la base canonique sont c,b,a ;*

*Cherchons, pour prouver que U est une famille génératrice de* $\mathbb{R}_2[X]$*, s'il existe* $\alpha, \beta, \gamma$ *tels que* $aX^2 + bX + c = \alpha 1 + \beta(1 + X) + \gamma(1 + X^2)$ *:*

*On obtient :* $\alpha + \beta + \gamma = c, \beta = b, \gamma = a$ *:*

*D'où :* $\alpha = c - a - b, \beta = b, \gamma = a$

*Donc U est une famille génératrice de 3 vecteurs de* $\mathbb{R}_2[X]$ *: c'est une base.*

*On a aussi les coordonnées de* $P(X) = X^2 + X$ *dans cette base :*

*Ce sont* $\alpha = c - a - b = -2, \beta = b = 1, \gamma = a = 1$ *:*

*Donc* $P(X) = -2(1) + 1(1 + X) + 1(1 + X^2) = X^2 + X$

*Les coordonnées de* $P(X)$ *sont dans la base canonique : (0,1,1), dans la base U : (-2,1,1)*

*De même pour Q et R.*

*Voir cours ; toute famille V contenant les éléments de U est aussi génératrice : puisque tout vecteur u de F est combinaison linéaire des vecteurs de U, u est aussi combinaison linéaire des vecteurs de V : il suffit de mettre des coefficients nuls devant les autres vecteurs*

*La famille* $V = \{(1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}$ *est une famille libre de* $\mathbb{R}^4$ *: vérification facile avec la définition ; ce n'est pas une famille génératrice sinon ce serait une base de* $\mathbb{R}^4$ *(famille libre et génératrice), de 3 vecteurs de* $\mathbb{R}^4$*,ce qui est impossible puisque dim*$\mathbb{R}^4 = 4$
*Les systèmes suivants de vecteurs forment une base de* $\mathbb{R}^3$ *si leur déterminant est non nul*

*a)* $u = (1, 0, 2); v = (-1, 3, 1)$ *;* $w = (2, 1, 5) : Det(u, v, w) = 0$

*b)* $u\prime = (1, 1, 3); v\prime = (-1, 3, 0); w\prime = (2, 0, 0) : Det(u, v, w) = -18$

*c)* $u = (1, 3, 0); v = (-2, 1, 1); w = (-4, 9, 3) : Det(u, v, w) = 0$

*Seule la famille* $(u\prime, v\prime, w\prime)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$*.*

# 20 TD Calculs matriciels

***exercise 20.1*** *On donne les matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ :
*calculer* $A + B; AB; BA$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \text{ calculer } CB$$

***exercise 20.2*** *Multiplier entre elles les matrices suivantes :* $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

***exercise 20.3*** *Soit les matrices A, B, C dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ :
$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *Quelles sont les matrices inversibles ?*
*Quels sont les rangs des matrices A, B,C ?*
*Quelle est la matrice inverse de B ?*

***exercise 20.4*** *Soit J la matrice n lignes , n colonnes définie par* $a_{ij} = 0$ *sauf* $a_{n-k;k+1} = 1$, *pour tout k compris entre 0 et n-1*

*Calculer les puissances de J :* $J^p$ *pour tout entier non nul p.*

***exercise 20.5*** *1) Soit la matrice* $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ : *calculer* $K^2$;

*2) Montrer que, M et N étant 2 matrices carrées :*

*La formule de Newton :* $(M+N)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} M^{n-p} N^p$ *s'applique si les matrices M et N commutent, c'est à dire si* $MN = NM$

*3) On pose pour a et b réels donnés :* $A = aI + bK$ *: montrer que pour tout entier n, il existe des réels* $a_n$ *et* $b_n$ *tels que* $A^n = a_n I + b_n K$; *donner les expressions de* $a_n$ *et* $b_n$.

***exercise 20.6*** *On considère l'ensemble des matrices du type :*

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -a & 1 & -\frac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ a étant un réel :}$$

*1) Montrer que pour tous réels a et b,* $M_a M_b = M_b M_a$

*2) En remarquant que* $M_0 = I_3$, *montrer que* $M_a$ *est inversible et chercher l'inverse.*

***exercise 20.7*** *Montrer que toute matrice carrée triangulaire ne comportant aucun zéro sur la diagonale principale est inversible. Montrer que le déterminant d'une telle matrice est le produit des éléments de la diagonale principale.*

*Indiquer une méthode simple pour trouver son inverse.*

$\boxed{\textit{Solutions des exercises du TD calculs matriciels}}$

*On donne les matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ : *on obtient*

$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ ; $AB = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ ; $BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$CB = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

*Multiplier entre elles les matrices suivantes :*$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

*A est une matrice (4 lignes, 5 colonnes), B est une matrice (3 lignes, 4 colonnes),*

*On ne peut qu'effectuer le produit BA et il vaut :* $BA = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

*a) A n'est pas une matrice inversible car* $DetA = 0$

*B est une matrice inversible car* $DetB = -18$

*C n'est pas une matrice inversible car* $DetC = 0$

*b) B est de rang 3 puisque* $DetB \neq 0$;*A et C sont de rang 2 puisque on peut extraire dans A et dans C des déterminants d'ordre 2 non nuls ; ou bien parce que dans A et dans C, il y a 2 colonnes non proportionnelles.*

*c) La matrice inverse de B par résolution de système du type* $MX = X$*' donne :*

$$\left\{ \begin{array}{c} x' = x - y + 2z \\ y' = x + 3y \\ z' = 3x \end{array} \right. \quad \textit{d'où :} \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{1}{3}z' \\ y = \frac{1}{3}(y' - \frac{1}{3}z') \\ z = x' + \frac{1}{3}y' - \frac{4}{9}z' \end{array} \right.$$

*D'où la matrice inverse :* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{-2}{9} \end{pmatrix}$

*On peut vérifier le calcul en effectuant le produit* $BB^{-1}$

*Soit J la matrice n lignes , n colonnes définie par* $a_{ij} = 0$ *sauf* $a_{n-k;k+1} = 1$, *pour tout k compris entre 0 et n-1*

*Les puissances de J :* $J^p$ *pour tout entier non nul p, s'obtiennent en calculant d'abord* $J^2 = I_n$, *donc si n est pair,*

$J^{2k} = (J^2)^k = I_n$;*et si n est impair* $J^{2k+1} = (J^2)^k J = J$ .

*Soit la matrice* $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ : $K^2 = I_4$

*On pose pour a et b réels donnés :* $A = aI + bK$ *: pour montrer que pour tout entier n, il existe des réels* $a_n$ *et* $b_n$ *tels que* $A^n = a_nI + b_nK$*, on peut procéder par récurrence ; il est plus rapide, afin d'avoir les valeurs de* $a_n$ *et* $b_n$ *de faire directement le calcul :*

*La formule de Newton :* $(A + B) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} A^{n-p}B^p$ *s'applique si les matrices A et B commutent :* $AB = BA$*, ce qui est toujours le cas quand l'une des deux est l'identité :*

*Donc* $A^n = (aI + bK)^n = \sum_{p=0}^{n} ()npa^{n-p}b^pK^p =$

$A^n = (\sum_{p\ pair\ p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p}b^p)I + (\sum_{p\ impair\ p=1}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p}b^p)K$

*Donc on a mis en évidence des coefficients tels que* $A^n = a_nI + b_nK$.

*On peut alors expliciter si nécessaire* $A^n$.

*1) La vérification est facile en effectuant* $M_aM_b$ *et* $M_bM_a$

*2) Il est facile également de vérifier que* $M_0 = I_3$ *: donc* $M_aM_{-a} = I_3$ *donc* $M_a$ *est inversible et* $M_a^{-1} = M_{-a}$

*Toute matrice carrée triangulaire ne comportant aucun zéro sur la diagonale principale est inversible. En effet, le déterminant d'une telle matrice est le produit des éléments de la diagonale principale, propriété que l'on démontre par récurrence, puisque le mineur associé à l'élément* $a_{11}$ *est un déterminant d'ordre* $n - 1$.

*Une méthode simple pour trouver son inverse est d'écrire et d'inverser le système* $MX = X\prime$ *et de commencer par le haut si la matrice est triangulaire inférieure, par le bas si elle est triangulaire supérieure...*

## 21 TD : Changements de bases

***exercise 21.1*** *Dans un espace vectoriel E, on donne une base* $(e_1, e_2)$ *et un endomorphisme u de matrice dans cette base :* $M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta$ *étant un réel donné.*

*1) Exprimer* $u(e_1)$ *et* $u(e_2)$ *dans la base* $(e_1, e_2)$.

*2) Soient* $f_1, f_2$ *les vecteurs donnés par :* $f_1 = e_1 + e_2,\ f_2 = e_1 - e_2$ :

*Montrer que* $(f_1, f_2)$ *forme une base de E*

*3) Exprimer* $u(f_1)$ *et* $u(f_2)$ *dans la base* $(e_1, e_2)$

*4) Exprimer* $u(f_1)$ *et* $u(f_2)$ *dans la base* $(f_1, f_2)$

*5) Ecrire alors la matrice de u dans la base* $(f_1, f_2)$.

*6) Traiter la question 5 par la méthode de matrice de passage*

***exercise 21.2*** *Soit f l'application linéaire de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *définie par sa matrice A dans des bases* $(e_1, e_2, e_3)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *et* $(f_1, f_2)$ *de* $\mathbb{R}^2$ :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

*a) Soit* $e'_1 = e_2 + e_3,\ e'_2 = e_1 + e_3,\ e'_3 = e_2 + e_1$ : *montrer que* $(e'_1, e'_2, e'_3)$ *forme une base de* $\mathbb{R}^3$.

*Trouver la matrice de f dans les bases* $(e'_1, e'_2, e'_3)$ *et* $(f_1, f_2)$.

*b) Soit* $f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ *et* $f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$ : *montrer que* $(f'_1, f'_2)$ *forme une base de* $\mathbb{R}^2$

*Trouver la matrice de f dans les bases* $(e'_1, e'_2, e'_3)$ *et* $(f'_1, f'_2)$.

***exercise 21.3*** *Soit E un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base* $B = (e_1, e_2, e_3)$ *et F un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base* $B\prime = (f_1, f_2, f_3)$

*Soit g l'application linéaire de E dans F ayant dans les bases B de E , B' de F, la matrice :* $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

*1) Montrer que g est un isomorphisme et définir* $g^{-1}$ *par sa matrice dans ces bases.*

*2) On pose* $e'_1 = e_1, e'_2 = e_2, e'_3 = -\dfrac{e_2}{3} + e_3$ :

*a) Montrer que* $(e'_1, e'_2, e'_3)$ *est une base B" de E*

*b) On suppose dans cette question que E = F :*

*Quelle est la matrice N de g dans la base B"?*

*c) Pour* $k > 0$, $k$ *entier, exprimer* $M^k$ *en fonction de N et de la matrice de passage P de la base B à la base B"*

*d) En déduire* $M^k$.

***exercise 21.4*** *A l'aide de l'exercise précédent et de la matrice de passage, répondre aux questions :*

*a)* $E = F = \mathbb{R}^3, B$ *est la base canonique: quelles sont les coordonnées de* $v = (1, 3, -2)$ *dans la base* $(e'_1, e'_2, e'_3)$*?*

*b)* $E = F = \mathbb{R}_2[X]$ : *expliciter* $(e'_1, e'_2, e'_3)$;

*Quelles sont les coordonnées de* $P(X)) = 2X^2 - 4X + 1$ *dans la base* $(e'_1, e'_2, e'_3)$*?*

*c) Vérifier les calculs par une méthode directe sans recours à la matrice de passage P.*

*d) Expliquer alors le rôle de la matrice de passage P dans ces deux exercises, comparer les méthodes...*

## *Faisons le point sur ce chapitre :*

- Indiquer plusieurs méthodes pour trouver la matrice d'une application linéaire dans une autre base
- Ecrire au moins cinq énoncés équivalents à :"M est une matrice carrée inversible"
- Indiquer plusieurs méthodes pour trouver le rang d'une matrice.

$\boxed{\textit{Solutions des exercises changement bases}}$

*1) On a* $u(e_1) = (\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2$ *et* $u(e_2) = (-\sin\theta)e_1 + (\cos\theta)e_2$

*2) Vérification facile, c'est une famillle libre de 2 vecteurs de E.*

*3)* $u(f_1\ ) = u(e_1 + e_2) = u(e_1) + u(e_2) = (\cos\theta - \sin\theta)e_1 + (\sin\theta + \cos\theta)e_2$; $u(f_2) = u(e_1 - e_2) = u(e_1) - u(e_2) = (\cos\theta + \sin\theta)e_1 + (\sin\theta - \cos\theta)e_2$

*4) Comme* $e_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ *et* $e_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$ *:*

*on a :* $u(f_1\ ) = (\cos\theta - \sin\theta)\frac{1}{2}(f_1 + f_2) + (\sin\theta + \cos\theta)\frac{1}{2}(f_1 - f_2) = (\cos\theta)f_1 - (\sin\theta)f_2$; *et de même* $u(f_2\ ) = (\sin\theta)f_1 + (\cos\theta)f_2$

*5) D'où la matrice de u dans la base* $(f_1, f_2)$ *: c'est* $N(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

*6) Par la méthode de matrice de passage : on a* $N(\theta) = P^{-1}M(\theta)P$*, avec* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, *matrice des coordonnées des vecteurs* $f_1, f_2$ *dans la base* $(e_1, e_2)$.

*1)* $(e'_1, e'_2, e'_3)$ *forme une base de* $\mathbb{R}^3$ *: il est facile de montrer que c'est une famille libre ;*

*La matrice de f dans les bases* $(e'_1, e'_2, e'_3)$ *et* $(f_1, f_2)$ *s'obtient en cherchant* $f(e'_1) = f(e_2 + e_3) = (0, -1); f(e'_2) = (3, 0); f(e'_3) = (1, 5)$ *:*

*D'où la matrice* $A' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;

*2)* $(f'_1, f'_2)$ *forme une base de* $\mathbb{R}^2$ *: facile maintenant...*

*Pour la question suivante, on exprime* $f_1, f_2$ *en fonction de* $f'_1, f'_2$ *:* $f_1 = (f'_1 + f'_2); f_2 = (f'_1 - f'_2)$;

*La matrice de f dans les bases* $(e'_1, e'_2, e'_3)$ *et* $(f'_1, f'_2)$ *:* $f(e'_1) = -f_2 = -f'_1 + f'_2); f(e'_2) = 3f_1 = 3(f'_1 + f'_2)$;

$f(e'_3) = f_1 + 5f_2 = f'_1 + f'_2 + 5(f'_1 - f'_2) = 6f'_1 - 4f'_2$ *:*

*On en déduit la matrice de f dans les bases* $(e'_1, e'_2, e'_3)$ *et* $(f'_1, f'_2)$ *:*

$A" = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

*Soit E un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base* $B = (e_1, e_2, e_3)$ *et F un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base* $B\prime = (f_1, f_2, f_3)$

*Soit g l'application linéaire de E dans F ayant dans les bases B de E , B′ de F, la matrice :* $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

*1) g est un isomorphisme comme on le voit en calculant le déterminant qui vaut -2*

*On peut définir* $g^{-1}$ *par sa matrice dans ces bases : il suffit d'inverser les formules analytiques de g :*

*On trouve* $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

*2) On pose* $e'_1 = e_1,\ e'_2 = e_2,\ e'_3 = -\frac{e_2}{3} + e_3$ *:*

*a)* $(e'_1, e'_2, e'_3)$ *est une base B" de E car le déterminant de la matrice de passage P de B à B", c'est à dire le déterminant des vecteurs* $(e'_1, e'_2, e'_3)$ *est non nul :* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ :

$DetP = 1$

*b) On suppose que* $E = F$ *: la matrice N de g dans la base B" est obtenue par deux méthodes*

*- en calculant :* $(e_1, e_2, e_3)$ *dans la base* $(e'_1, e'_2, e'_3)$ *: ce qui revient à inverser P;*

*Soit :* $e_1 = e'_1$, $e_2 = e'_2$, $e_3 = \frac{e'_2}{3} + e'_3$, *puis* $g(e'_1) = g(e_1) = e'_1; g(e'_2) = g(e_2) = -2e_2; g(e'_3) = g(-\frac{e_2}{3} + e_3) = \frac{2e_2}{3} - e_2 + e_3 = \frac{-e_2}{3} + e_3$

*Donc* $g(e'_3) = \frac{-e'_2}{3} + \frac{e'_2}{3} + e'_3 = e'_3$

*Finalement :* $g(e'_1) = e'_1; g(e'_2) = -2e_2; g(e'_3) = e'_3$

*D'où la matrice* $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

*- en utilisant* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et la formule* $N = P^{-1}MP$. *On a rapidement* $P^{-1}$ *, à l'aide de* $e_1 = e'_1$, $e_2 = e'_2$, $e_3 = \frac{e'_2}{3} + e'_3$ : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *matrice de passage de B "à B.*

*En effectuant les produits matriciels, on on trouve le même résultat.*

*c) Comme la matrice N est diagonale, pour* $k > 0$, *k entier,* $N^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

*D'où, à l'aide de la matrice de passage P de la base B à la base B" :* $N = P^{-1}MP$ *équivaut à* $M = PNP^{-1}$

*On a* $M^2 = PN^2P^{-1}PN^2P^{-1} = PN^2P^{-1}$, *et par récurrence :* $M^k = PN^kP^{-1}$.

*d) On peut en déduire le calcul de* $M^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^k & \frac{1}{3}((-2)^k - 1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

*On peut vérifier ce résultat en calculant directement* $M^2$

*A l'aide de l'exercise précédent et de la matrice de passage, répondre aux questions :*

*a)* $E = F = \mathbb{R}^3$ *: les coordonnées de* $v = (1, 3, -2)$ *dans la base* $(e'_1, e'_2, e'_3)$ *sont obtenues par la formule générale vue en cours :*

$$V = PV_1$$

*On a ainsi les coordonnées d'un vecteur dans l'ancienne base en fonction des coordonnées de ce vecteur dans la nouvelle base ; on a aussi :*

$$V_1 = P^{-1}V$$

*Où* $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, V_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ *que l'on a par le calcul : on obtient* $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{7}{3} \\ -2 \end{pmatrix}$

*b)* $E = F =_2 [X] : (e'_1, e'_2, e'_3) = (1, X, -\frac{1}{3}X + X^2)$

*Les coordonnées de* $P(X)) = 2X^2 - 4X + 1$ *dans la base* $(e'_1, e'_2, e'_3)$ *sont obtenues par les mêmes formules de passage :*

*Puisque les coordonnées de* $P(X) = 2X^2 - 4X + 1$ *dans la base* $(e_1, e_2, e_3)$ *sont* $(1, -4, 2)$, *on a*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{10}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

La seule chose qui est différente de la question a), c'est que le polynôme $P(X)) = 2X^2 - 4X + 1$ n'est pas égal au triplé de ses composantes, comme c'est le cas dans $R^3$...( *à méditer si nécessaire..)*

*c) Par une méthode directe sans recours à la matrice de passage P :*

*On a* $v = (1, 3, -2) = e_1 + 3e_2 - 2e_3 = e'_1 + 3e'_2 - 2(\frac{e'_2}{3} + e'_3) = e'_1 + 7\frac{e'_2}{3} - 2e'_3;$

*Et aussi :* $P(X) = 2X^2 - 4X + 1 = e_1 - 4e_2 + 2e_3 = e'_1 - 4e'_2 + 2(\frac{e'_2}{3} + e'_3) = e'_1 - 10\frac{e'_2}{3} + 2e'_3;$

*On peut aussi simplement transformer* $P(X)$ *de façon à faire "apparaître" la nouvelle base :*

$P(X) = 2X^2 - 4X + 1 = 1 - \frac{10}{3}X + 2(-\frac{1}{3}X + X^2)$...

*d) Le rôle de la matrice de passage P est essentiellement de permettre des calculs systématiques et de vérifier que l'on a bien une nouvelle base.*

## 22 TD : Systèmes d'équations

***exercise 22.1*** *Résoudre les systèmes d'équations suivants :*

*1)* $\begin{cases} x+2y+2z=2 \\ y-4z=-3 \\ -y+2z=2 \end{cases}$ ; 2) $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x+y-z=0 \\ x+2y+z=3 \end{cases}$ ; 3) $\begin{cases} x+y+z=m+1 \\ mx+y+(m-1)z=m \\ x+my+z=1 \end{cases}$ *,m étant un paramètre : discuter selon les valeurs de m.*

*4)* $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x+5y+3z=-1 \\ -2y-10z=14 \end{cases}$

***exercise 22.2*** *Résoudre les systèmes d'équations suivants :*

*1)* $\begin{cases} 2x+2y-z+6t=4 \\ 4x+4y+z+10t=13 \\ 6x+5y+20t=19 \end{cases}$

*2)* $\begin{cases} 2x-5y+3z-4s+2t=2 \\ 3x-7y+2z-5s+4t=-3 \\ 5x-10y-5z-4s+7t=-20 \end{cases}$

*3)* $\begin{cases} x-4y+3z=2 \\ 3x-y+2z=0 \\ 4x-5y+5z=2 \\ 2x+3y-z=a \end{cases}$ *; discuter selon la valeur de a, le rang et les solutions du système.*

*4)* $\begin{cases} x-2y+3z+t=a \\ -2x+3y-7z-t=2 \\ y+a^2z+at=-4 \end{cases}$

***Systèmes homogènes***

***exercise 22.3*** *Dans les cas suivants chercher le rang du système, les solutions, les inconnues principales, une base de cet espace de solutions :*

*1)* $\begin{cases} x+3y-2z=0 \\ -2x+3y-7z=0 \\ -x+6y+z=0 \end{cases}$

*2)* $\begin{cases} x+3y+2z-s=0 \\ -2x+y-7z+2s=0 \\ -3x+5y-12z+3s=0 \end{cases}$

*3)* $\begin{cases} -x+y+2z-s+t=0 \\ -2x+y-z+s=0 \\ -4x+3y+3z-s+2t=0 \\ -3x+3y+z-s+t=0 \end{cases}$

***Recherche de matrices inverses par méthode du pivot de Gauss (ou autre méthode) :***

***exercise 22.4*** *Déterminer si possible les matrices inverses des matrices données en résolvant le système $MX = X\prime$ :*

$$\textit{1) } M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; 2)N = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\textit{Solutions des exercises systèmes}}$

*Les méthodes ayant été détaillées dans le cours, certaines corrections seront complètement rédigées, d'autres non...*

*Résolution des systèmes d'équations suivants :*

*1)* $\left\{\begin{array}{c} x+2y+2z=2 \\ y-4z=-3 \\ -y+2z=2 \end{array}\right.$ *;on obtient la solution unique :* $\left\{x=3, y=-1, z=\frac{1}{2}\right\}$

2) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=4 \\ 2x+y-z=0 \\ x+2y+z=3 \end{array}\right.$ *;on obtient la solution unique :* $\{x=2, y=-1, z=3\}$

3) $\left\{\begin{array}{c} x+y+z=m+1 \\ mx+y+(m-1)z=m \\ x+my+z=1 \end{array}\right.$ *, m étant un paramètre :*

*On pose la matrice augmentée :*

$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ m & 1 & m-1 & m \\ 1 & m & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $L_2 \leftarrow L_2-mL_1; L_3 \leftarrow L_3-L_1;$ *puis,* $L_3 \leftarrow L_3+L_2$ *:*

$M \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 1-m & -1 & -m^2 \\ 0 & m-1 & 0 & -m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 1-m & -1 & -m^2 \\ 0 & 0 & -1 & -m-m^2 \end{pmatrix}$

*Si* $m=1$ *: les lignes 2 et 3 sont incompatibles : pas de solution ;*

*Sinon, le système est de rang 3 : on obtient la solution unique :*

$$x=\frac{m^3-m^2-2m+1}{1-m}; y=\frac{m}{1-m}; z=m+m^2$$

*4)* $\left\{\begin{array}{c} x+2y-z=3 \\ 2x+5y+3z=-1 \\ -2y-10z=14 \end{array}\right.$ *:*

*La matrice augmentée est :*

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -10 & 14 \end{pmatrix}$ $L_2 \leftarrow L_2-2L_1$ *équivalente à :* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & -1 & -5 & 7 \end{pmatrix}$

*On voit aussi que M est équivalente à une matrice 2 lignes puisque la troisième, multiple de la deuxième, est inutile : elle est de rang 2.*

*Donc z est variable libre, x et y inconnues principales :*

$$x=11z+17; y=-5z-7$$

*Pour résoudre le système d'équations :*

*1)* $\left\{\begin{array}{c} 2x+2y-z+6t=4 \\ 4x+4y+z+10t=13 \\ 6x+5y+20t=19 \end{array}\right.$

*On pourra utiliser les transformations :* $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1; L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$; *puis, échanger* $L_2$ *et* $L_3$

*Les pivots sont alors :* $2, -1$ *et* $3$;

*Le rang est : 3 ; il y a une variable libre : t ;*

*Les solutions sont :*

$x = -\dfrac{20}{3}t + \dfrac{29}{6}$; $y = 4t - 2; z = \dfrac{1}{3}(2t + 5)$

*2)* $\begin{cases} 2x - 5y + 3z - 4s + 2t = 2 \\ 3x - 7y + 2z - 5s + 4t = -3 \\ 5x - 10y - 5z - 4s + 7t = -20 \end{cases}$ :

*On pourra utiliser les transformations :* $L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1; L_3 \leftarrow 2L_3 - 5L_1$; *puis,* $L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2$

*Les pivots sont alors :* $2; 1$ *et* $2$ *:* $r = 3; x, y, s$ *sont inconnues principales.*

*Les solutions sont :* $x = 11z - 15t - 44$ *;*$y = 5z - 8t - 22$; $s = 3t + 5$ *; z et t variables libres*

*3)* $\begin{cases} x - 4y + 3z = 2 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ 4x - 5y + 5z = 2 \\ 2x + 3y - z = a \end{cases}$ *; discuter selon la valeur de a, le rang et les solutions du système.*

*Le premier pivot est 1 ;*

*Sur la matrice augmentée on utilise les transformations :* $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1; L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1; L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$ :

*On obient la matrice équivalente :*

$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 11 & -7 & -6 \\ 0 & 11 & -7 & -6 \\ 0 & 11 & -7 & a-4 \end{pmatrix}$

*Ainsi, pour que le système soit compatible, il faut que* $a - 4 = -6 : a = -2$ :

*Alors, le système équivaut à 2 lignes : il est de rang 2 ; x et y sont inconnues principales, z est libre :*

*On obtient :*

$$x = \frac{-5}{11}z - \frac{2}{11}; y = \frac{7}{11}z - \frac{6}{11}$$

*4)* $\begin{cases} x - 2y + 3z + t = a \\ -2x + 3y - 7z - t = 2 \\ y + a^2z + at = -4 \end{cases}$

*La matrice augmentée est :* $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & a \\ -2 & 3 & -7 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & a^2 & a & -4 \end{pmatrix}$ $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ *équivalente à :*

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & a \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2+2a \\ 0 & 1 & a^2 & a & -4 \end{pmatrix}$ $L_3 \leftarrow L_3 + L_2 : M \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & a \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2+2a \\ 0 & 0 & a^2-1 & a+1 & 2a-2 \end{pmatrix}$ :

*- Si* $a = -1$ *: le système n'a pas de solution, on dit qu'il est incompatible, puisque la dernière équation est impossible.*

*- Si* $a = 1$ *: le rang est 3 ; z est variable libre ; la dernière ligne donne* $t = 0$ *; puis :*

*Les solutions sont :* $x = -7 - 5z$ *;* $y = -4 - z, t = 0$;*z libre*

*- Sinon, le rang est 3 ; t est variable libre ; les solutions sont :*

$$\begin{cases} x = \dfrac{t(a+4)}{a-1} - \dfrac{14+7a+3a^2}{a+1} \\ y = \dfrac{ta}{a-1} - \dfrac{2(a^2+2a+2)}{a+1} \\ z = \dfrac{2}{a+1} - \dfrac{t}{a-1} \\ t = t \end{cases}$$

***Systèmes homogènes***

*On rappelle le théorème :*

*Les solutions d'un système homogène $MX = 0$ forment un espace vectoriel de dimension égal au nombre de variables libres ; si r est le rang du système, p le nombre d'inconnues, les solutions forment un espace vectoriel de dimension $p - r$ ; c'est le nombre de variables libres, les autres sont les r inconnues principales. On obtient une base de cet espace de solutions en posant par exemple successivement chaque variable libre égale à 1, et et les autres variables libres nulles.*

*Dans les cas suivants chercher le rang du système, les solutions, les inconnues principales, une base de cet espace de solutions :*

*1)* $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ -2x + 3y - 7z = 0 \\ -x + 6y + z = 0 \end{cases}$ *: On obtient la solution unique* $x = 0; y = 0; z = 0$

*2)* $\begin{cases} x + 3y + 2z - s = 0 \\ -2x + y - 7z + 2s = 0 \\ -3x + 5y - 12z + 3s = 0 \end{cases}$ *:*

*On obtient le système équivalent :*

$$\begin{cases} x + 3y + 2z - s = 0 \\ 7y - 3z = 0 \end{cases}$$

*Le rang est 2 ; il y a* $4 - 2 = 2$ *inconnues principales x et y ; et 2 variables libres : z et s :*

*On obtient :* $y = \dfrac{3z}{7}; x = \dfrac{-23z}{7} + s$

*Une base de cet espace de solutions, de dimension 2 est :* $(u, v)$,

$u(\dfrac{-23}{7}, \dfrac{3}{7}, 1, 0)$ *et* $v(1, 0, 0, 1)$;

*Pour l'obtenir, on peut prendre d'abord* $z = 1$ *et* $s = 0$*, puis,* $s = 1$ *et* $z = 0$.

*3)* $\begin{cases} -x + y + 2z - s + t = 0 \\ -2x + y - z + s = 0 \\ -4x + 3y + 3z - s + 2t = 0 \\ -3x + 3y + z - s + t = 0 \end{cases}$ *:*

*La matrice est, après avoir multiplié la ligne 1 par -1 pour que le premier pivot soit 1 :*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 2 & -2 \end{pmatrix} :$$

*La ligne 4 est inutile ; le rang est 3 ; donc il y a* 2 *variables libres et* 3 *inconnues principales ;*

*On obtient :*

$$x = \frac{4}{5}s + \frac{1}{5}t;\ y = s;\ z = \frac{2}{5}s - \frac{2}{5}t$$

*Une base de cet espace de solutions, de dimension 2 est* $u(\frac{4}{5}, 1, \frac{2}{5}, 1, 0)$ *et* $v(\frac{1}{5}, 0, \frac{-2}{5}, 0, 1)$

***Recherche de matrices inverses par méthode du pivot de Gauss (ou autre méthode) :***

*On trouve les matrices inverses des matrices données en résolvant le système* $MX = X\prime$ :

*NB : on pourra voir une autre méthode dans le livre d'algèbre linéaire série Schaum déjà cité.*

1) $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, *inverse :*$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{13}{8} & \frac{33}{16} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & -\frac{13}{16} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2) $N = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, *inverse :*$N^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{5} & \frac{4}{5} & \frac{17}{5} & \frac{7}{5} \\ \frac{9}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{11}{5} & -\frac{6}{5} \\ -\frac{13}{5} & \frac{4}{5} & \frac{12}{5} & \frac{7}{5} \\ -\frac{11}{5} & \frac{3}{5} & \frac{14}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix}$ $(\det N = 5)$