

Introduction à l'analyse

Planche 1

1 Logique

EXERCICE 1

1. Ecrire les négations des phrases suivantes.
 - (i) Le film est bon et j'irai le voir.
 - (ii) Le film est bon ou je n'irai pas le voir.
2. Ecrire les négations et les contraposées des phrases suivantes.
 - (i) Si le film est bon alors j'irai le voir.
 - (ii) Si le film n'est pas bon alors je n'irai pas le voir.

EXERCICE 2

Rédiger les négations des phrases suivantes.

1. Tous les lundi, je joue au foot.
2. Tous les lundi, je joue au squash et je me douche.
3. Quand il fait beau le dimanche, je fais des maths.
4. Tous les lundi, s'il fait beau, je ne fais pas des maths.

EXERCICE 3

Montrer que l'assertion : " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : y \leq x$ " est vraie
et que l'assertion " $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y \leq x$ " est fausse.

EXERCICE 4

Donner la négation des assertions ci-dessus. Déterminer si ces assertions suivantes sont vraies ou fausses.
Démontrer que soit l'assertion soit la négation est vraie.

1. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.
5. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$.

EXERCICE 5

1. Démontrer l'implication $0 \leq x \leq y \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq y^2$. Ecrire sa contraposée et sa réciproque. Déterminer si sa réciproque est vraie.
2. Peut-on trouver un intervalle $I = [a; b]$, avec $a < b$, tel que la proposition suivante soit vraie :

$$\forall x \in I, \forall y \in I, x < y \Leftrightarrow x^2 > y^2 ?$$

3. Peut-on trouver un intervalle $I = [a; b]$, avec $a < b$, tel que la proposition suivante soit vraie :

$$\exists x \in I, \exists y \in I, x < y \text{ et } \frac{1}{x} < \frac{1}{y} ?$$

EXERCICE 6

1. Trouver trois constantes a, b, c telles que la proposition suivante soit vraie : $\forall x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 = ax^2 + bx + c$.
2. Trouver trois constantes a, b, c telles que la proposition $\exists y \in \mathbb{R}, (y+1)^2 = ay^2 + by + c$ soit vraie mais la proposition $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq y, (x+1)^2 = ax^2 + bx + c$ soit fausse.
3. Trouver trois constantes a, b, c telles que la proposition $\exists x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 = ax^2 + bx + c$ soit fausse.

EXERCICE 7

Démontrer par récurrence l'inégalité $2^n \geq n^2$, pour tout entier n supérieur ou égal à un entier n_0 qu'on déterminera. A-t-on $2^n \geq n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

EXERCICE 8

Soit un réel $x \geq -1$, démontrer par récurrence l'inégalité $(1+x)^n \geq 1+nx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 9

Démontrer par récurrence la formule des sommes géométriques : $\sum_{i=0}^n q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$ (avec $q \neq 1$).

EXERCICE 10

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par contraposée, que si n^2 est pair, alors n est pair.

EXERCICE 11

Soit a un réel. Montrer par contraposée, que si $\forall \varepsilon > 0 \ a \leq \varepsilon$, alors $a \leq 0$.

EXERCICE 12

Montrer par absurde que $\sqrt{2}$ est un irrationnel (écrire $\sqrt{2}$ sous forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ et discuter la parité de p et q).

2 Ensembles

EXERCICE 13

Soient les ensembles $A = [1, 4]$, $B = [3, 6]$, $C = [2, 5]$ et $D = \{2\}$.

1. Tracer dans $\mathbb{R}$ les ensembles suivants : $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus D$.
2. Tracer dans $\mathbb{R}^2$ les ensembles suivants : $(A \cap B) \times A$, $\overline{B} \times (A \cup C)$, $(A \setminus D) \times D$.

EXERCICE 14

1. Définir en termes d'intervalles les ensembles suivants :
(i) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x+1| < 2\}$, (ii) $B = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \geq 2\}$.
2. Définir à l'aide des valeurs absolues les ensembles suivants :
(i) $A = [1, 5]$, (ii) $B =]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$.

EXERCICE 15

Définir en termes d'intervalles les ensembles suivants :

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq |x+3|\}$,
2. $B = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2x - 3| > 2x + 1\}$,
3. $C = \{x \in \mathbb{R} : |x - |x+1|| < 2\}$.

EXERCICE 16

Donner l'ensemble des parties de $A = \{\{1; 2\}; \{0; 1; 2\}\}$ et $B = \{0; 1; 2\}$.

EXERCICE 17

Soient A, B, C des sous-ensembles d'un ensemble E . Démontrer les propriétés suivantes :

1. $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.
2. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.
3. $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.
4. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
5. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

3 Applications

EXERCICE 18

On donne $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4\}$. Déterminer $f(\{a, b, c\})$ et $f^{-1}(\{1, 3\})$ pour les applications $f : E \rightarrow F$ suivantes :

1. $f(a) = 1, f(b) = 3, f(c) = 4, f(d) = 2$,
2. $f(a) = f(b) = 2, f(c) = f(d) = 3$,
3. $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 2$.

EXERCICE 19

1. On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Déterminer :

(i) $f([-1, 1])$, (ii) $\text{Im}(f)$, (iii) $f^{-1}([-1, 1])$, (iv) $f^{-1}(\mathbb{R})$.

Existe-t-il des éléments de l'ensemble d'arrivée qui ne sont l'image par f d'aucun élément de l'ensemble de départ ? ... qui ont plusieurs antécédents ? L'application f est-elle injective, surjective, bijective ?

2. L'application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $g(x) = x^2$, est-elle injective, surjective, bijective ?
3. Même questions qu'au point 1. pour l'application $h : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{1}{x}$.

EXERCICE 20

L'application suivante est-elle injective, surjective, bijective ?

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$.

EXERCICE 21

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - x$.

1. Cette fonction est-elle injective, surjective ?
2. Déterminer $f^{-1}(\{0\})$, puis $f^{-1}(\mathbb{R}^+)$ et $f(\mathbb{R}^+)$.

EXERCICE 22

1. On considère l'application $f : [-1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ définie par $f(x) = (x + 1)^2$. Montrer que f est bijective et déterminer l'expression de sa réciproque.

2. On considère l'application $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ définie par $g(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$. Montrer que g est bijective et déterminer l'expression de sa réciproque.

3. On considère l'application $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x^2 + 2x$. Est-elle injective, surjective, bijective ? Déterminer deux intervalles I et J tels que l'application $\tilde{h} : I \rightarrow J$, définie par $\tilde{h}(x) = x^2 + 2x$ soit bijective. Déterminer l'expression de sa réciproque.

EXERCICE 23

Montrer les résultats suivants. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. Alors

1. f et g injectives $\Rightarrow g \circ f$ est injective.
2. f et g surjectives $\Rightarrow g \circ f$ est surjective.
3. $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ est surjective.
4. $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ est injective.
5. f et g bijectives $\Rightarrow g \circ f$ bijective, avec $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

EXERCICE 24

1. Soit $f : E \rightarrow F$ une application, et soient A et B deux parties de E .

(i) Démontrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(ii) Démontrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et trouver un contre-exemple qui montre que l'égalité peut être fausse.

(iii) Démontrer que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ si f est injective.

2. Soit $f : E \rightarrow F$ une application, et soient C et D deux parties de F .

Démontrer que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ et $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

4 Autres exercices

EXERCICE 25

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire avec les quantificateurs les expressions suivantes.

1. f est majorée ;
2. f est bornée ;
3. f est paire ;
4. f est impaire ;
5. f ne s'annule jamais ;
6. f est périodique ;
7. f est croissante.

EXERCICE 26

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donner la négation des énoncés suivants.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 1$.
2. L'application f est croissante.
3. L'application f est croissante et positive.
4. Il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) \leq 0$.
5. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que quel que soit $y \in \mathbb{R}$, si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$.

EXERCICE 27

Soit un ensemble E , et deux parties A et B de E . Démontrer l'équivalence

$$A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A.$$

EXERCICE 28

Ecrire avec les quantificateurs : $A \subset B$ et $A \not\subset B$.

EXERCICE 29

Soit E un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties. Montrer les assertions suivantes.

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$,
2. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$.