Université d'Aix-Marseille
Semestre 1

Licence de Mathématiques
2013-2014

Introduction à l'analyse

Planche 2

1 Généralités

Exercice 1

1. Déterminer deux réels a et b tels que

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

2. Soit n un entier non nul, en déduire une expression simple de

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n.n+1}.$$

Exercice 2

Soit

$$I = \{x \in \mathbb{R} : \ -2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2\}.$$

1. Déterminer les réels x tels que $x + \frac{1}{2x} \leq 2$.
2. Déterminer les réels x tels que $-2 < x + \frac{1}{2x}$.
3. Montrer que I est la réunion de deux intervalles.
4. Déterminer (si ils existent) les majorants, minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément de I.

Exercice 3

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{x^4 + x^2 \sin x - 2\cos x}{x^4 + 3x^2 + 2}.$$

1. Déterminer son domaine de définition D_f.
2. Démontrer que $f(x) \leq 1$ pour tout $x \in D_f$.
3. Démontrer que $|f(x) - 1| \leq \frac{4}{x^2+1}$.
4. Donner un minorant et un majorant de la fonction f.

Exercice 4

Démontrer que pour tout $x, y \in]-1, 1[$, on a

$$x < y \Longrightarrow 2x(1-y^2) < 2y(1-x^2).$$

2 Fonctions usuelles

Exercice 5

Résoudre les équations suivantes :
1. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, **2.** $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$, **3.** $x^{2/3} - 7x^{1/3} + 6 = 0$.

Exercice 6

Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln(x^2 - 1) = \ln(2 - x) + \ln(3 - x)$, **2.** $(\log_{10} x)^2 - 7\log_{10} x + 6 = 0$, **3.** $e^{2x} - 3e^x - 2 = 0$,

4. $e^x + e^{-x} = 4$, **5.** $2^{2x} - 7^x + 6 = 0$, **6.** $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$,

7. $2^{x^3} = 3^{x^2}$, **8.** $x^x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, **9.** $\left(\frac{4}{9}\right)^x \left(\frac{8}{27}\right)^{1-x} = \frac{2}{3}$.

Exercice 7

Les fonctions *sinus hyperbolique* et *cosinus hyperbolique* sont définies respectivement par les formules suivantes :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Déterminer les domaines de définition, étudier la parité, calculer les dérivées et tracer les graphes de ces fonctions. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Exercice 8

On définit la fonction *tangente hyperbolique* par la formule

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

Quel est le domaine de définition de cette fonction ? Donner son expression explicite en fonction des exponentielles. Est-elle paire, impaire ? Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ nous avons les égalités suivantes :

$$\tanh(a+b) = \frac{\tanh(a) + \tanh(b)}{1 + \tanh(a)\tanh(b)} \qquad \text{et} \qquad \tanh(a-b) = \frac{\tanh(a) - \tanh(b)}{1 - \tanh(a)\tanh(b)}.$$

Exercice 9

Résoudre les équations suivantes :

$$\cos(3x) = \frac{1}{2}, \quad \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin(2x) = \sin x, \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(2x), \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x,$$

$$\cos(3x+1) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right), \quad \sin(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right), \quad \tan(2x) = \tan x.$$

Exercice 10

Résoudre l'équation $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$, puis l'inéquation $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 > 0$.

Exercice 11

Démontrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a $\frac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x)$.

Exercice 12

Démontrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

3 Etude de fonction

Exercice 13

Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivation puis calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1(x)=\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right),\quad f_2(x)=\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right),\quad f_3(x)=\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2},$$

$$f_4(x)=\sqrt{x^2-2\,x-5},\quad f_5(x)=\sqrt{\frac{2+3\,x}{5-2\,x}},\quad f_6(x)=x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$f_7(x)=\ln\left(\frac{x^2+x-1}{-3x+5}\right),\quad f_8(x)=\exp\left(\sqrt{\frac{2-x}{3x+1}}\right),\quad f_9(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

$$f_{10}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\quad f_{11}(x)=x^{\frac{1}{x}},\quad f_{12}(x)=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}.$$

Exercice 14

Calculer les limites suivantes :

$$\textbf{1. } (i)\ \lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}},\quad (ii)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right),\quad (iii)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right),$$

$$\textbf{2. } (i)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{x}},\quad (ii)\ \lim_{x\to0^+}x^2\ln x,\quad (iii)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\ln(2x+1)-\ln(x+2)\right),$$

$$\textbf{3. } (i)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{e^x-2},\quad (ii)\ \lim_{x\to0^+}xe^{-1/x},\quad (iii)\ \lim_{x\to-\infty}x^2e^x,$$

$$\textbf{4. } (i)\ \lim_{x\to0^+}x\ln x,\quad (ii)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x},\quad (iii)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^{\sqrt{x}}},\quad (iv)\ \lim_{x\to+\infty}(\ln x)^2x^4e^{-x},$$

$$\textbf{5. } (i)\ \lim_{x\to0^+}x^x,\quad (ii)\ \lim_{x\to0^+}x^{(x^x)},\quad (iii)\ \lim_{x\to0^+}(x^x)^x.$$

Exercice 15

Etudier chacune des fonctions de l'Exercice 13 en suivant le plan ci-dessous.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f aux extrémités de son domaine de définition.
3. Déterminer l'ensemble de dérivation de f et calculer sa dérivée.
4. Déterminer le tableau des variations.
5. Etudier les branches infinies.
6. Représenter graphiquement f.

4 Fonctions trigonométriques et hyperboliques réciproques

Exercice 16

1. Démontrer que : $\forall x\in[-1,1],\quad \arccos(x)+\arcsin(x)=\frac{\pi}{2}$.

2. Démontrer que : $\arctan(x)+\arctan(\frac{1}{x})=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{si } x>0,\\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x<0.\end{cases}$

Exercice 17

Résoudre les équations suivantes.

1. $\arcsin(x) = 2\arccos(x)$
2. $\arctan(2x) + \arctan(x) = \dfrac{\pi}{4}$

EXERCICE 18

Pour chacune des équations suivantes, déterminer l'ensemble de ses solutions.

1. $\cos(\arccos(x)) = x$, **2.** $\arccos(\cos(x)) = x$,
3. $\sin(\arcsin(x)) = x$, **4.** $\arcsin(\sin(x)) = x$,
5. $\tan(\arctan(x)) = x$, **6.** $\arctan(\tan(x)) = x$.

EXERCICE 19

Simplifier les expressions suivantes :
1. $\cos(\arcsin x)$ pour $x \in [-1, 1]$,
2. $\cos(\arctan x)$ pour $x \in \mathbb{R}$,
3. $\arcsin(\sin x)$ pour $x \in [-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
4. $\arctan(\tan x)$ pour $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$.

EXERCICE 20

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

EXERCICE 21

Donner l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer leur dérivée :

$$f_1(x) = \arcsin(2x), \quad f_2(x) = x\arccos x, \quad f_3(x) = \arctan(e^x), \quad f_4(x) = \sqrt{\arctan x}.$$

EXERCICE 22

1. Démontrer que la fonction $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective.

On définit la fonction *argument sinus hyperbolique* $\operatorname{arg\,sinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ comme la fonction réciproque de la fonction sinh.

2. A partir de la représentation graphique de sinh déduire celle de arg sinh.
3. Démontrer que la fonction arg sinh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
4. Déterminer une expression de arg sinh en fonction de ln (on utilisera une équation du second degré).

EXERCICE 23

Refaire l'exercice précédent en remplaçant la fonction sinh par la fonction $\tanh : \mathbb{R} \to]-1, 1[$. La fonction réciproque de tanh est appelée *argument tangente hyperbolique* et notée arg tanh.