L1 – Ateliers Math

Semaine du 17 au 22 Septembre

Exercice 1

Calculer les racines carrées de $a = 3 + 4i$ par la méthode algébrique puis par la méthode trigonométrique .

On rappelle que :

- Pour calculer les racines carrées $z = x + iy$ d'un complexe $a = \alpha + i\beta$ par la méthode algébrique on écrit que $z^2 = a$ et on résout le système en x , y obtenu en identifiant les parties réelles et les parties imaginaires dans les deux membres .
- Pour calculer les racines carrées $z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ d'un complexe $a = r e^{i\varphi}$ on écrit que $z^2 = a$ et on identifie module et arguments dans les deux membres .

Exercice 2

Calculer les racines cubiques de 1 par la méthode algébrique puis par la méthode trigonométrique .

Exercice 3

Calculer les racines cubiques de $a = 3 + 4i$ par la méthode trigonométrique . Peut-on les calculer par la méthode algébrique ?

Exercice 4

Soit $n \in \mathbf{N}^* = \mathbf{N} - \{ 0 \}$. Calculer les n racines nièmes de 1 ainsi que la somme de ces n racines.

Exercice 5

Soient $z_1 = \sqrt{3} + i$ et $z_2 = 1 + i$.

1) Déterminer le module et un argument de chacun des deux complexes z_1 et z_2.
2) Soit $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$. Ecrire z_3 sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique et en déduire les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

L1 – Ateliers Math

Semaine du 24 au 29 Septembre

Exercice 1

Soient E un ensemble et $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . A tout $A \in \mathscr{P}(E)$ on associe la fonction χ_A de E dans $\{0,1\}$ définie par :

$\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$
$\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$

et appelée fonction caractéristique de A .

1) Soit f une application de E dans $\{0,1\}$. Montrer qu'il existe un unique $A \in \mathscr{P}(E)$ tel que $f = \chi_A$.

2) Soient $(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2$, $\overline{A} = C_E(A)$ et $B - A = B \cap \overline{A}$. Montrer que :

$\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$

$\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$

$\chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A$

et en déduire χ_{A-B} en fonction de χ_A et de χ_B.

Indication : On remarquera que $E = (A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A) \cup \left(\overline{A \cup B}\right)$.

3) Montrer , en utilisant les fonctions caractéristiques , que :

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivité de l'intersection par rapport à la réunion)

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité de la réunion par rapport à l'intersection)

(Les deux dernières relations s'appellent les lois de Morgan)

4) Soit $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

Calculer $\chi_{A\Delta B}$ en fonction de χ_A et de χ_B et montrer que $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

L1 – Ateliers Math

Semaine du 1 au 6 Octobre

Exercice 1

Exprimer les propositions suivantes à l'aide de quantificateurs et donner leur négation :

Proposition A : Il existe un réel strictement positif dont le cube est strictement négatif.

Proposition B : Dans **R**, l'ensemble des solutions de l'équation $x^3 = 2$ est inclus dans $]1,2[$.

Exercice 2

Ecrire les propositions suivantes à l'aide de symboles logiques et préciser si elles sont vraies pour tout x de **R**.

a) Pour que x soit inférieur ou égal à 2, il faut que x soit strictement inférieur à 1.

b) Pour que x soit inférieur ou égal à 2, il suffit que x soit strictement inférieur à 1.

c) Pour que x soit inférieur ou égal à 2, il faut que x soit différent de 2.

d) Pour que x soit inférieur ou égal à 2, il suffit que x soit différent de 2.

Exercice 3

Démontrer, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité :

$$\sum_{k=n+1}^{k=2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$$

Exercice 4

Soit E un ensemble non vide et A, B et C trois parties de E. Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{array}\right\} \Rightarrow B \subset C$$

Exercice 5

Soit E un ensemble et A, B et C trois parties de E. Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} A \subset B \cap C \\ B \cup C \subset A \end{array}\right\} \Rightarrow A = B = C$$

Exercice 6

Soit E un ensemble et A, B et C trois parties de E. Simplifier les expressions suivantes :

a) $A \cap (\overline{A} \cup B)$

b) $A \cup (\bar{A} \cap B)$

c) $A \cap (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup C)$

d) $A \cup (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$

L1 – Ateliers Math

Semaine du 14 au 19 Octobre

Exercice 1

Soient E , E , E' et F' des ensembles non vides .

1) Montrer que : $E \times F \subset E' \times F' \Leftrightarrow E \subset E'$ et $F \subset F'$.

2) En déduire que : $E \times F = E' \times F' \Leftrightarrow E = E'$ et $F = F'$

Exercice 2

Soit X un ensemble . On appelle partition de X toute famille $(A_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles de X non vides , deux à deux disjoints et dont la réunion est X .

Etant donnée une partition de X , on considère la relation binaire $\mathscr{R}$ définie dans X par :

$$x \mathscr{R} y \Leftrightarrow \exists i \in I , x \in A_i , y \in A_i$$

1) Montrer que c'est une relation d'équivalence.

2) Déterminer les classes d'équivalence et l'ensemble quotient .

Exercice 3

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne , notée $*$, associative , commutative et telle que : $\forall x \in E , x * x = x$.

On définit sur E la relation binaire $\mathscr{R}$ par : $x \mathscr{R} y \Leftrightarrow x * y = y$.

1) Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre.

2) Quelle est la relation d'ordre obtenue quand on prend :

a) $E = \mathscr{P}(X)$ où X est un ensemble quelconque et $\cap$ pour loi de composition interne.

b) $E = \mathscr{P}(X)$ où X est un ensemble quelconque et $\cup$ pour loi de composition interne.

L1 – Ateliers Math

Semaine du 15 au 20 Octobre

Exercice 1

Soit E un ensemble non vide et A une partie non vide de E . On note $\mathscr{R}$ la relation définie sur $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ par : $\mathrm{X}\,\mathscr{P}\,\mathrm{Y} \Leftrightarrow \mathrm{X}\cap\mathrm{A}=\mathrm{Y}\cap\mathrm{A}$.

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence et construire une bijection de $\mathscr{P}(\mathrm{E})/\mathscr{R}$ sur $\mathscr{P}(\mathrm{A})$.

Exercice 2

Soit $\mathbf{N}$. Si $(x,y)\in\mathbf{N}^2$, on dit que x divise y et on écrit $x|y$ si et seulement si $\exists z\in\mathbf{N}$ tel que $y=zx$.

1. Montrer que $|$ est relation d'ordre partiel . Montrer que $(\mathbf{N},|)$ admet un plus petit élément et un plus grand élément .
2. Montrer que $(\mathbf{N}^*,|)$ admet un plus petit élément mais qu'il n'admet pas de plus grand élément . Montrer que toute partie finie non vide de $(\mathbf{N}^*,|)$ admet une borne inférieure et une borne supérieure .
3. Montrer que $(\mathbf{N}-\{0,1\},|)$ n'admet , ni plus petit élément , ni plus grand élément . A-t-il des éléments minimaux .

Exercice 3

On appelle treillis tout ensemble ordonné $(E,\leq)$ dans lequel toute partie à deux éléments admet une borne supérieure et une borne inférieure .

1. Montrer que , si Ω est un ensemble non vide , $(\mathscr{P}(\Omega),\subset)$ est un treillis .
2. Représenter graphiquement le treillis des diviseurs de 90 dans $(\mathbf{N}^*,|)$.

L1 – Ateliers Math

Semaine du 22 au 27 Octobre

Exercice 1

Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $k \in \mathbf{Z}$ et $E_k = [\, kn, (k+1)n \,[$.

1. Montrer que les $\{E_k / k \in \mathbf{Z}\}$ forment une partition de $\mathbf{R}$ (et donc aussi de $\mathbf{Z}$).
2. En déduire que, $\forall a \in \mathbf{Z}$, il existe un couple unique $(p, r_a) \in \mathbf{Z} \times [\![0, n-1]\!]$ tel que :

$$a = pn + r_a$$

On dira que p est le quotient dans la division de a par n et que r_a en est le reste.

On dira que n divise a et on écrira $n \mid a$ si $r_a = 0$.

3. Montrer que $\mid$ n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbf{Z}$.

Exercice 2

On considère, dans $\mathbf{Z}$, la relation $\underset{3}{\equiv}$ définie par :

$$a \underset{3}{\equiv} b \iff 3 \mid a - b$$

1. Montrer que $\underset{3}{\equiv}$ est une relation d'équivalence. On notera $\mathbf{Z}_3$ ou $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ l'ensemble quotient de $\mathbf{Z}$ par $\underset{3}{\equiv}$ (l'ensemble des classes d'équivalence).
2. Montrer que, dans la division de a par 3, $a \underset{3}{\equiv} r_a$. r_a sera appelé représentant canonique de la classe $\overline{a}$ de a. Quelles valeurs r_a peut-il prendre quand a parcourt $\mathbf{Z}$? En déduire le nombre d'éléments de $\mathbf{Z}_3$.
3. On considère l'application φ de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}_3$ définie par $\varphi(a, b) = \overline{a+b}$. Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} a \underset{3}{\equiv} a' \\ \text{et} \quad b \underset{3}{\equiv} b' \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(a, b) = \varphi(a', b')$$

L'application φ définit donc une loi interne sur $\mathbf{Z}_3$ que l'on notera $+$:

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$$

On définit de même une loi interne sur $\mathbf{Z}_3$ que l'on notera $\times$ par :

$$\overline{a} \times \overline{b} = \overline{a \times b}$$