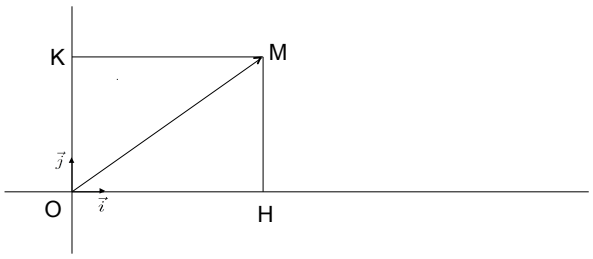
Université de Provence — 2008-2009
Licence SPC — 1ère année-S2

Mathématiques pour PC 2

1 Géométrie et théorie des groupes

1.1 Géométrie dans le plan

Sur ce dessin les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et ont pour longueur 1. On associe à tout couple de réels (x, y) le point $M = M(x, y)$ d'abscisse x (= longueur de OH) et d'ordonnée y (= longueur de OK), ainsi que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ (ou tout vecteur parallèle à $\overrightarrow{OM}$, de même sens et de même longueur) :



On dit que x et y sont les coordonnées de M ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$, et que le nombre complexe $z = x + iy$ est leur affixe. Quand on utilise les affixes, les vecteurs de base sont parfois notés $\vec{u}$ et $\vec{v}$ au lieu de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ pour ne pas confondre le vecteur $\vec{i}$ avec le nombre complexe i.

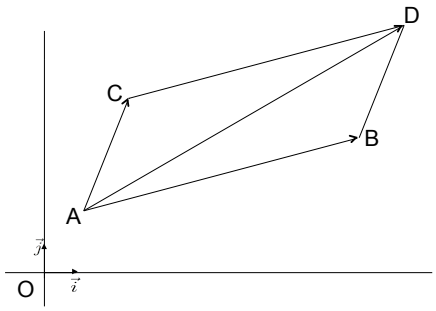
D'après le théorème de Pythagore la longueur d'un vecteur $\overrightarrow{V}$ de coordonnées x et y (appelée *norme de* $\overrightarrow{V}$) est

$$\left\|\overrightarrow{V}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La longueur d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut être notée AB au lieu de $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

a) Somme de deux vecteurs.

La *somme de deux vecteurs* $\overrightarrow{V}(x, y)$ et $\overrightarrow{V}'(x', y')$ est par définition le vecteur $\overrightarrow{W}(x+x', y+y')$. Pour tout parallélogramme $ABDC$ tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{V}'$, le vecteur $\overrightarrow{W}$ est égal à $\overrightarrow{AD}$:

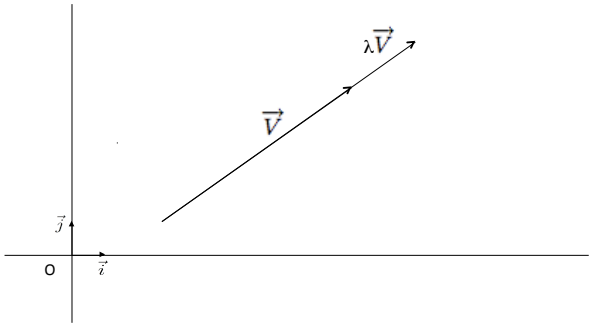


On définit aussi l'addition dans l'ensemble des couples de réels, c'est à dire dans $\mathbb{R}^2$, en posant

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$

b) Produit d'un vecteur par un réel.

Étant donné un vecteur $\overrightarrow{V}(x, y)$ et un réel λ on notera $\lambda\overrightarrow{V}$ le vecteur de coordonnées λx et λy. Il a même direction que $\overrightarrow{V}$ et, si $\lambda > 0$, il a même sens que $\overrightarrow{V}$.



On définit de même le produit d'un réel λ par un couple de réels (x, y) en posant

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

c) Produit scalaire de deux vecteurs.

Le *produit scalaire* de deux vecteurs $\overrightarrow{V}(x, y)$ et $\overrightarrow{V}'(x', y')$, noté $\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{V}'$, est un nombre réel défini par

$$\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{V}' = xx' + yy'.$$

En particulier $\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{V}$ est égal à $x^2 + y^2$ c'est à dire à $\left\|\overrightarrow{V}\right\|^2$.

Les propriétés suivantes sont souvent utilisées implicitement dans les calculs :

Théorème 1.1 *Le produit scalaire est symétrique c'est à dire, pour tous vecteurs $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V}'$,*

$$\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{V}' = \overrightarrow{V}' \cdot \overrightarrow{V} \ .$$

Il est linéaire par rapport aux deux variables : pour tous vecteurs $\overrightarrow{V}, \overrightarrow{V}', \overrightarrow{V}''$ et pour tout réel λ,

$$\begin{aligned}
&\left(\overrightarrow{V} + \overrightarrow{V}'\right) \cdot \overrightarrow{V}'' = \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{V}'' + \overrightarrow{V}' \cdot \overrightarrow{V}'' \\
&\left(\lambda\overrightarrow{V}\right) \cdot \overrightarrow{V}' = \lambda\left(\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{V}'\right) \\
&\overrightarrow{V} \cdot \left(\overrightarrow{V}' + \overrightarrow{V}''\right) = \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{V}' + \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{V}'' \\
&\overrightarrow{V} \cdot \left(\lambda\overrightarrow{V}'\right) = \lambda\left(\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{V}'\right).
\end{aligned}$$

Autres propriétés du produit scalaire et de la norme :

Théorème 1.2

$$\left|\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{V}'\right| \leq \left\|\overrightarrow{V}\right\| \ \left\|\overrightarrow{V}'\right\| \quad \textit{(inégalité de Cauchy-Schwarz)}$$

$$\left\|\overrightarrow{V} + \overrightarrow{V}'\right\| \leq \left\|\overrightarrow{V}\right\| + \left\|\overrightarrow{V}'\right\| \quad \textit{(inégalité triangulaire)}$$

$$\left\|\lambda\overrightarrow{V}\right\| = |\lambda| \ \left\|\overrightarrow{V}\right\|.$$

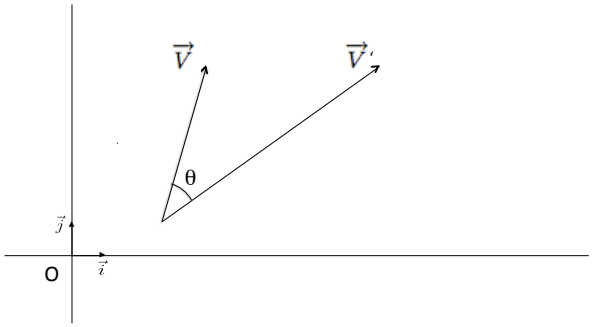
On a également les propriétés géométriques suivantes :

Théorème 1.3 *Soit $\theta \in [0;\pi]$ l'angle non orienté entre deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V}'$, alors*

$$\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{V}' = \left\|\overrightarrow{V}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{V}'\right\| \cos\theta$$

$$\left|\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{V}'\right| = \left\|\overrightarrow{V}\right\| \left\|\overrightarrow{V}'\right\| \quad \Leftrightarrow \quad \theta = 0 \text{ ou } \pi \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{V} \text{ et } \overrightarrow{V}' \text{ colinéaires}$$

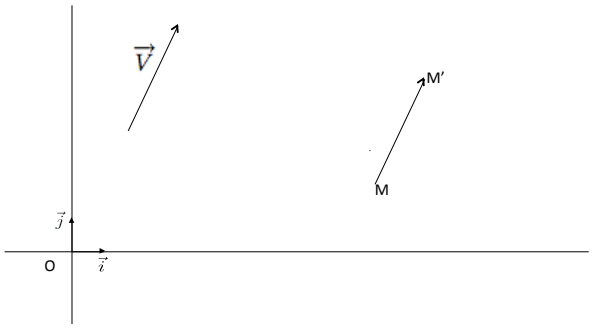
$$\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{V}' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{V} \perp \overrightarrow{V}'.$$



d) Transformations du plan.

Une transformation du plan est une correspondance qui associe, à tout point M du plan, un point M'.

Translations : La *translation de vecteur* $\overrightarrow{V}$ associe à tout point M le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{V}$:



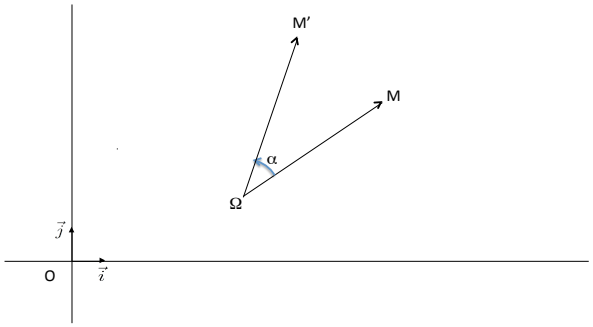
Si $\overrightarrow{V}$ a pour coordonnées x_0 et y_0 et si M a pour coordonnées x et y, alors les coordonnées de M' sont $x' = x + x_0$ et $y' = y + y_0$. On dit alors que l'*expression analytique* de la translation de vecteur $\overrightarrow{V}(x_0, y_0)$, c'est à dire la formule qui donne les coordonnées de M' en fonction de celles de M, est

$$\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0. \end{cases}$$

En utilisant les affixes ($z_0 = x_0 + iy_0,\ z = x + iy,\ z' = x' + iy'$) cette formule équivaut à

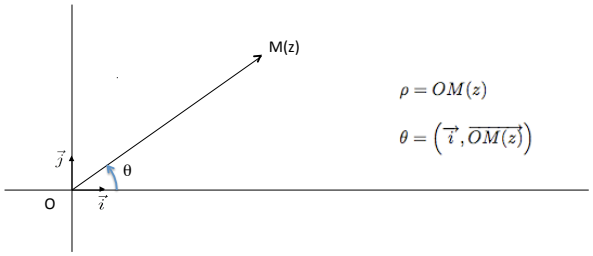
$$z' = z + z_0.$$

Rotations : La *rotation de centre Ω et d'angle α* associe à tout point M le point M' tel que $\Omega M = \Omega M'$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \alpha$.



Avant de donner l'expression analytique de la rotation, rappelons d'abord quelques définitions et formules sur les nombres complexes.

Rappel : Tout nombre complexe $z = x + iy$ peut s'écrire sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$, où $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $e^{i\theta}$ est par définition le nombre complexe $\cos\theta + i\sin\theta$. La représentation géométrique de cette écriture est :

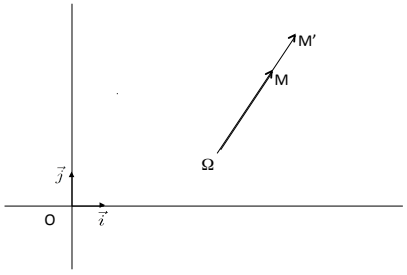


Expression analytique de la rotation : Revenons au schéma précédent et donnons un nom aux affixes des trois points : $\Omega(z_0)$, $M(z)$ et $M'(z')$. On appellera θ, non pas l'angle $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$, mais l'angle $\left(\vec{i}, \overrightarrow{\Omega M}\right)$. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ (c'est à dire $z - z_0$) est donc égal à $\rho e^{i\theta}$. De même l'affixe de $\overrightarrow{\Omega M'}$ est $z' - z_0 = \rho e^{i(\theta+\alpha)} = \rho e^{i\theta} e^{i\alpha} = e^{i\alpha}(z - z_0)$. De cette dernière relation on tire l'expression analytique de la rotation de centre Ω et d'angle α : on a $z' = e^{i\alpha}(z - z_0) + z_0$ c'est à dire

$$z' = e^{i\alpha} z + (1 - e^{i\alpha}) z_0.$$

On remarquera que c'est un polynôme du premier degré, c'est à dire une fonction de la forme $az + b$ où z est la variable (complexe) et a et b des constantes (complexes).

Homothéties : L'*homothétie de centre* Ω *et de rapport* r (où r est un réel non nul) associe à tout point M le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = r\ \overrightarrow{\Omega M}$.



Cette relation vectorielle équivaut à $z' - z_0 = r(z - z_0)$ c'est à dire

$$z' = rz + (1 - r) z_0.$$

Similitudes directes : Une *similitude directe* est la composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre. En utilisant les expressions analytiques de la rotation d'angle α et de l'homothétie de rapport r, l'affixe z du point M et l'affixe z' de son transformé M' (par la similitude) sont liés par la relation $z' - z_0 = re^{i\alpha}(z - z_0)$ c'est à dire

$$z' = re^{i\alpha}z + (1 - re^{i\alpha})z_0.$$

Cette relation est encore de la forme $z' = az + b$. Réciproquement, soient a et b deux nombres complexes et soit T la transformation dont l'expression analytique est $z' = az + b$, cette transformation est-elle une similitude ? Oui si a n'est ni 0 ni 1 : on peut mettre le nombre complexe a sous la forme $re^{i\alpha}$ avec $r \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ et considérer le point Ω d'affixe $z_0 = \dfrac{b}{1 - re^{i\alpha}}$; on a alors $z' = az + b = re^{i\alpha}z + (1 - re^{i\alpha})z_0$, ce qui prouve que T est la similitude de centre Ω, d'angle α et de rapport r.

Il reste à préciser quelle est la relation T si $a = 0$ ou 1. Dans le cas $a = 0$ cette transformation n'est pas intéressante : M' est le point d'affixe b, il ne dépend pas de z c'est à dire tous les points $M(z)$ du plan sont transformés en un seul point $M'(b)$. Dans le cas $a = 1$ on a $z' = z + b$ donc T est la translation de vecteur $\overrightarrow{V}(b)$.

Dans la pratique, quand on veut déterminer le centre d'une similitude directe d'expression analytique $z' = az + b$, on détermine son centre $\Omega(z_0)$ en résolvant l'équation $z_0 = az_0 + b$ ce qui donne $z_0 = \dfrac{b}{1 - a}$.

La similitude directe d'expression analytique $z' = az + b$ est appelée *isométrie directe* si $|a| = 1$.

Propriétés des rotations et des similitudes directes

Il est intuitivement clair qu'une rotation conserve les longueurs : soient A et B deux points quelconques et soient A' et B' leurs transformés respectifs par une rotation R, alors $A'B' = AB$.

De même elle conserve les angles : si A, B, C sont trois points quelconques et A', B', C' leurs transformés par R, alors $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

Il est moins immédiat de trouver toutes les transformations qui conservent les longueurs et les angles. Nous allons démontrer (en partie) le théorème suivant :

Théorème 1.4 *Soit T une transformation du plan.*

(i) Si T conserve les longueurs et les angles alors c'est une rotation ou une translation.

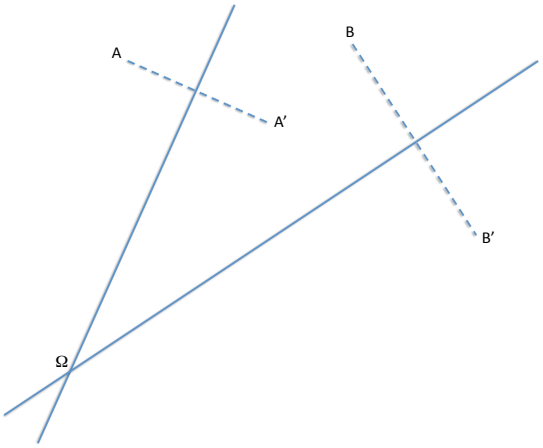
(ii) Si T conserve les angles et multiplie la longueur de tout segment par une même constante $k > 0$, c'est une similitude directe.

Démonstration : Soit T une transformation qui conserve les longueurs et les angles ; ceci équivaut à faire l'hypothèse suivante :

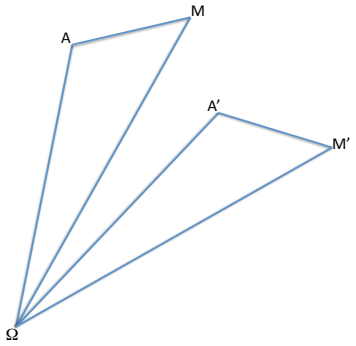
($\mathcal{H}$) : T transforme tout triangle ABC en un triangle $A'B'C'$ égal (sous entendu : en conservant ses angles orientés).

Choisissons deux points fixés A et B dans le plan, et appelons A' et B' leurs transformés par T.

Si la médiatrice du segment $[AA']$ coupe la médiatrice du segment $[BB']$ en un point Ω, alors les triangles ΩAB et $\Omega A'B'$ sont égaux ($\Omega A = \Omega A'$ et $\Omega B = \Omega B'$ parce que Ω est sur les deux médiatrices, et $AB = A'B'$ parce que T conserve les longueurs). On déduit alors de l'hypothèse ($\mathcal{H}$) que le transformé de Ω est Ω lui-même.



Considérons maintenant un point quelconque M, et M' son transformé par T.



Comme T transforme le triangle ΩAM en un triangle $\Omega A'M'$ égal, on a $\Omega M = \Omega M'$ et

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right) &= \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega A}\right)+\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega A'}\right)+\left(\overrightarrow{\Omega A'},\overrightarrow{\Omega M'}\right)\\ &= \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega A}\right)+\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega A'}\right)+\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega M}\right)\\ &= \left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega A'}\right),\end{aligned}$$

autrement dit M' est aussi le transformé de M par la rotation de centre Ω et d'angle $\alpha = \left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega A'}\right)$. Quand le point M varie dans le plan, Ω et α restent les mêmes puisqu'ils ne dépendent que de A et B qu'on a supposé fixés. T est donc la rotation de centre Ω et d'angle α.

Reste à dire ce qu'est la transformation T dans le cas où les médiatrices de $[AA']$ et de $[BB']$ ne se coupent pas, c'est à dire quand elles sont parallèles : une démonstration analogue prouve que T est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

On démontre de même la partie (ii) du théorème. ■

1.2 Structure de groupe

a) Définition.

Donnons d'abord un exemple : quand on dit que $\mathbb{R}$ est un groupe pour l'addition ça signifie que l'addition

est une loi de composition interne (c'est à dire l'addition de deux nombres réels est un nombre réel), que l'addition est associative ($(x+y)+z = x+(y+z)$), qu'elle admet un élément neutre ($x+0 = 0+x = x$) et que tout élément de $\mathbb{R}$ admet un symétrique par rapport à l'élément neutre ($x+(-x) = (-x)+x = 0$).

Un autre exemple : quand on dit que $\mathbb{R}^*$ (ensemble des réels non nuls) est un groupe pour la multiplication ça signifie que la multiplication est une loi de composition interne (c'est à dire la multiplication de deux réels non nuls est un réel non nul), que la multiplication est associative ($(xy)z = x(yz)$), qu'elle admet un élément neutre ($x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$) et que tout réel non nul admet un symétrique (réel non nul aussi) par rapport à l'élément neutre ($x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$).

La définition générale est la suivante :

Définition 1.5 *Un ensemble G est un groupe pour une loi de composition $*$ si*

(i) cette loi est interne c'est à dire $x * y$ appartient à G pour tout x et y dans G ;

(ii) elle est associative c'est à dire $(x * y) * z = x * (y * z)$ pour tout x, y, z dans G ;

(iii) elle admet un élément neutre c'est à dire il existe un élément e de G tel que

$$x * e = e * x = x \quad \text{pour tout } x \in E;$$

(iv) tout élément $x \in G$ admet un symétrique pour la loi $*$ c'est à dire il existe un élément x' de G tel que

$$x * x' = x' * x = e.$$

Quelques contre-exemples :

Le produit scalaire n'est pas une loi interne, parce que le produit scalaire de deux vecteurs n'est pas un vecteur mais un nombre.

L'addition est une loi interne sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers positifs ou nuls parce que $x + y$ appartient à $\mathbb{N}$ pour tout x et y dans $\mathbb{N}$; cependant $\mathbb{N}$ n'est pas un groupe pour l'addition : le symétrique (pour l'addition) d'un élément $n \in \mathbb{N}$ est $-n$, qui n'appartient pas à $\mathbb{N}$ si $n > 0$.

D'autre part un groupe E est dit *commutatif* ou *abélien* si $x * y = y * x$ pour tout x et y dans E.

b) Autre exemple et définitions.

Il y a bien sûr d'autres lois de composition interne que l'addition et la multiplication, par exemple la composition des applications. Soit E un ensemble, on notera $\mathcal{F}(E)$ l'ensemble des applications de E dans E. Étant donnés f et g deux applications de E dans E, on note $f \circ g$ et on appelle *composée de f et de g* l'application définie par

$$f \circ g(x) = f(g(x)) \quad \text{pour tout } x \in E.$$

La loi $\circ$ est alors une loi de composition interne dans l'ensemble $\mathcal{F}(E)$ puisque $f \circ g$ est une application de E dans E. Vérifions qu'elle est associative : $(f \circ g) \circ h$ est égal à $f \circ (g \circ h)$ parce que, pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} (f \circ g) \circ h(x) &= (f \circ g)(h(x)) \\ &= f(g(h(x))) \\ &= f(g \circ h(x)) \\ &= f \circ (g \circ h)(x). \end{aligned}$$

L'élément neutre de la loi $\circ$ est l'identité sur E, c'est à dire c'est l'application $Id_E : E \to E$ définie par $Id_E(x) = x$ pour tout $x \in E$, puisque cette application vérifie évidemment $f \circ Id_E = Id_E \circ f = f$ (pour tout $f \in \mathcal{F}(E)$).

Quant à l'élément symétrique de f (pour la loi $\circ$), s'il existe c'est un élément $g \in \mathcal{F}(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f = Id_E$ c'est à dire $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ pour tout $x \in E$. On sait que ceci équivaut à dire que f est bijective et que son application réciproque est g. Donc seules les bijections auront un élément symétrique pour la loi $\circ$, et on a le théorème suivant :

Théorème 1.6 *L'ensemble des bijections de E sur E, noté $\mathfrak{S}(E)$, est un groupe pour la composition des applications. On l'appelle "groupe symétrique de E".*

En général ce groupe n'est pas commutatif : par exemple les fonctions $f(x) = x + 1$ et $g(x) = 2x$, qui sont des bijections de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, vérifient $f \circ g \neq g \circ f$ puisque

$$f \circ g(x) = f(2x) = 2x + 1 \quad \text{et} \quad g \circ f(x) = g(x + 1) = 2x + 2.$$

Quand l'ensemble E est fini, les bijections de E dans E s'appellent *permutations* de E.

Encore quelques définitions :

Définition 1.7 *Étant donné un groupe G pour la loi de composition $*$, on dira qu'un sous-ensemble H de G est un sous-groupe si H est un groupe pour la loi $*$.*

Pour vérifier (sur des exemples) ces conditions, il est inutile de démontrer l'associativité (c'est à dire $(x * y) * z = x * (y * z)$ pour tout x, y, z dans H) puisque les éléments de H sont des éléments du groupe G et vérifient donc cette condition. Par contre il faut vérifier que la loi $*$ est une loi de composition interne dans H, que l'élément neutre de G appartient à H, et que l'élément symétrique de tout élément de H (qui existe dans G) appartient à H.

Par exemple il est clair que $(\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$: la somme de deux entiers est un entier, l'élément neutre 0 est un entier, et l'élément symétrique de tout entier x est l'entier $-x$.

Définition 1.8 *Étant donné un groupe G_1 (pour une loi notée $*$) et un groupe G_2 (pour une loi notée $\star$), on dira que l'application $\varphi : G_1 \to G_2$ est un homomorphisme de groupes lorsqu'on a, pour tout x et y dans G_1,*

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) \star \varphi(y).$$

Un exemple classique est la fonction exponentielle : c'est un homomorphisme de $\mathbb{R}$ (groupe pour l'addition) dans $\mathbb{R}^*$ (groupe pour la multiplication) puisque c'est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^*$ et qu'elle vérifie

$$e^{x+y} = e^x e^y \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}.$$

On appelle *noyau* d'un homomorphisme φ l'ensemble des $x \in G_1$ tels que $\varphi(x) = 0$. On appelle *image* de φ l'ensemble des $\varphi(x)$ pour $x \in G_1$. Par exemple si l'application $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est définie par $\varphi(n) = 2n$, l'image de φ est l'ensemble des entiers pairs.

Notations utilisées : Kerφ pour le noyau, et Imφ ou $\varphi(G_1)$ pour l'image.

Un *isomorphisme* est un homomorphisme bijectif.

Le *produit cartésien* de deux ensembles E_1 et E_2, noté $E_1 \times E_2$, est l'ensemble des couples (x_1, x_2), où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. Si E_1 et E_2 sont des groupes pour les lois $*$ et $\star$ respectivement, leur produit cartésien est un groupe (pour la loi correspondante sur l'ensemble des couples) appelé produit direct des groupes E_1 et E_2. Par exemple $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ est un groupe pour l'addition des couples de réels.

c) Action d'un groupe sur un ensemble.

L'exemple le plus simple est l'action du groupe $\mathbb{R}^2$ sur le plan affine (c'est à dire sur l'ensemble des points du plan). On décide d'associer à tout couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, la translation de vecteur $\overrightarrow{V}(x_0, y_0)$; cette translation agit sur le plan affine en ce sens qu'elle translate ses points $M(x, y)$ en $M'(x + x_0, y + y_0)$. Donc en associant à tout couple de réels une translation, on a défini une action du groupe $\mathbb{R}^2$ sur le plan affine. Pour que la définition soit correcte, il faut remarquer que la translation associée à une somme $(x_0 + x_1, y_0 + y_1)$ est la composée de la translation associée à (x_0, y_0) par celle associée à (x_1, y_1).

Pour avoir une idée de la définition générale, voir le site

http ://fr.wikipedia.org/Action_de_groupe

Pour des exemples d'applications,

http ://fr.wikipedia.org/Symétrie_(physique)

http ://fr.wikipedia.org/Brisure_de_symétrie

http ://fr.wikipedia.org/Brisure_spontanée_de_symétrie

2 Calcul différentiel

2.1 Équations différentielles linéaires

a) Équations différentielles linéaires du premier ordre.

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une relation de la forme

$$ay' + by = c \tag{1}$$

où a, b et c sont des fonctions données, et il s'agit de trouver toutes les fonctions y qui satisfont cette relation. Donnons deux exemples :

• $(x^2+1)y' + (5x+3)y = x^5$ est une équation différentielle ; pour la résoudre il faut connaître la méthode que nous allons exposer, et il faut aussi faire un certain nombre de calculs d'intégrales.

• Un exemple plus simple est l'équation différentielle $3y' = x^5$ (on a enlevé la principale difficulté en choisissant $b = 0$). Les fonctions y qui vérifient cette équation vérifient aussi $y' = \frac{1}{3}x^5$, autrement dit ces fonctions sont les primitives de $\frac{x^5}{3}$. Sachant que x^5 a pour primitive $\frac{x^6}{6}$, les solutions de l'équation différentielle $3y' = x^5$ sont les fonctions $y(x) = \frac{x^6}{18} + C$ (quelle que soit la valeur de la constante C).

Pour résoudre l'équation différentielle (1) dans le cas général, nous considérerons d'abord le cas particulier où la fonction c est nulle :

Théorème 2.1 *(équation différentielle sans second membre) Soient a et b deux fonctions. Les solutions de l'équation différentielle*

$$ay' + by = 0$$

sont les fonctions $\boxed{y(x) = Ce^{F(x)}}$*, où C est une constante réelle et F est une primitive de la fonction $f = -\frac{b}{a}$ (la variable x appartient à un intervalle où les fonctions a et b sont définies, et où la fonction a ne s'annule pas).*

Remarque 2.2 *Quel est le sens de cette précision sur la variable x : si par exemple la fonction a vaut $a(x) = x$, alors la fonction $f = -\frac{b}{a}$ n'est pas définie en $x = 0$. Elle est définie sur les deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, et par conséquent il y a possibilité de prendre deux constantes C_1 et C_2 : on aura $y(x) = C_1 e^{F(x)}$ pour tout $x \in]-\infty, 0[$ et $y(x) = C_2 e^{F(x)}$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.*

Résolution (un peu plus compliquée) du cas général :

Théorème 2.3 *(méthode de variations de la constante) Soient a, b et c trois fonctions. Les solutions de l'équation différentielle*

$$ay' + by = c$$

sont de la forme $\boxed{y(x) = G(x)e^{F(x)} + Ce^{F(x)}}$*, où C est une constante réelle, F est une des primitives de la fonction $f = -\frac{b}{a}$, et G une des primitives de la fonction $g = \frac{c}{a \cdot e^F}$ (la variable x appartient à un intervalle où les fonctions a, b et c sont définies, et où la fonction a ne s'annule pas).*

Démonstration du premier théorème : Soit y une solution de l'équation différentielle $ay' + by = 0$. Il s'agit de démontrer qu'il existe une constante C telle que $y(x) = Ce^{F(x)}$; ça revient à démontrer que la fonction $\frac{y(x)}{e^{F(x)}}$ est égale à une constante C. On sait qu'une fonction est constante si et seulement si sa dérivée est nulle. Donc pour démontrer le théorème, il suffit de vérifier que la dérivée de la fonction

$\frac{y(x)}{e^{F(x)}} = y(x)e^{-F(x)}$ est nulle. Cette dérivée vaut

$$\begin{aligned} y'(x)e^{-F(x)} - y(x)F'(x)e^{-F(x)} &= y'(x)e^{-F(x)} - y(x)f(x)e^{-F(x)} \\ &= e^{-F(x)}(y'(x) - y(x)f(x)) \\ &= e^{-F(x)}\left(y'(x) + y(x)\frac{b(x)}{a(x)}\right) \\ &= e^{-F(x)}\frac{a(x)y'(x)+y(x)b(x)}{a(x)} \end{aligned}$$

et elle est effectivement nulle puisqu'on a supposé au départ $ay' + by = 0$. ■

Démonstration du deuxième théorème : La méthode de variation de la constante consiste à résoudre d'abord l'équation sans second membre $ay' + by = 0$: c'est ce qu'on a fait au premier théorème, on a trouvé $y(x) = Ce^{F(x)}$ avec C constante et F primitive de la fonction $f = -\frac{b}{a}$. Ensuite on cherche les solutions de l'équation avec second membre sous la forme $y(x) = C(x)e^{F(x)}$, où cette fois-ci $C(x)$ est une fonction. On a

$$\begin{aligned} ay' + by = c &\Leftrightarrow a(x)\left(C'(x)e^{F(x)} + C(x)F'(x)e^{F(x)}\right) + b(x)C(x)e^{F(x)} = c(x) \\ &\Leftrightarrow a(x)\left(C'(x)e^{F(x)} - C(x)\frac{b(x)}{a(x)}e^{F(x)}\right) + b(x)C(x)e^{F(x)} = c(x) \\ &\Leftrightarrow a(x)C'(x)e^{F(x)} - C(x)b(x)e^{F(x)} + b(x)C(x)e^{F(x)} = c(x) \\ &\Leftrightarrow a(x)C'(x)e^{F(x)} = c(x) \\ &\Leftrightarrow C'(x) = \frac{c(x)}{a(x)e^{F(x)}}. \end{aligned}$$

Ceci équivaut à dire que la fonction C est une primitive de la fonction $g = \frac{c}{a \cdot e^F}$. On choisit une primitive de g, qu'on appelle G, et on a alors $C(x) = G(x) + C$ avec C constante. D'où $y(x) = C(x)e^{F(x)} = G(x)e^{F(x)} + Ce^{F(x)}$. ■

Nous allons voir comment utiliser ces théorèmes sur les deux exemples suivants :

$(E_1) : xy' + y = x^3 + x^2 + 2x + 1,$

$(E_2) : y' + xy = x^3 + x^2 + 2x + 1.$

On leur associe les équations sans second membre :

$(e_1) : xy' + y = 0,$

$(e_2) : y' + xy = 0,$

qu'on résoud au moyen du premier théorème. Pour l'équation (e_1),

$f_1(x) = -\frac{1}{x}$ et $F_1(x) = -\ln|x|$ donc la solution générale de (e_1) est $y(x) = Ce^{-\ln|x|} = \frac{C}{e^{\ln|x|}} = \frac{C}{|x|}$, ou plus simplement $y(x) = \frac{C}{x}$ (en remplaçant C par $-C$ pour les x négatifs).

Pour l'équation (e_2),

$f_2(x) = -x$ et $F_2(x) = -\frac{x^2}{2}$ donc la solution générale de (e_2) est $y(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$.

Résolvons maintenant l'équation (E_1) au moyen du second théorème :

$g_1(x) = \frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{xe^{-\ln|x|}} = \pm(x^3 + x^2 + 2x + 1)$ et $G_1(x) = \pm\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 + x\right)$ (suivant le signe de x). Par la formule du théorème, la solution générale de (E_1) est $y(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3} + x + 1 + \frac{C}{x}$.

Résolvons (E_2) :

$g_2(x) = \frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{e^{-\frac{x^2}{2}}} = (x^3 + x^2 + 2x + 1)e^{\frac{x^2}{2}}$, il y a donc un problème pour intégrer cette fonction et on peut dire que la méthode de variation de la constante n'est pas efficace pour résoudre (E_2). Une autre méthode consiste à chercher une solution particulière de l'équation (E_2) sous la forme d'un polynôme (ce

qui est indiqué normalement dans l'énoncé). Ici c'est un polynôme de degré 2 : $y(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. On reporte ce polynôme dans l'équation (E_2), ce qui fait

$2\alpha x + \beta + x(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = x^3 + x^2 + 2x + 1$ c'est à dire

$\alpha x^3 + \beta x^2 + (\gamma + 2\alpha)x + \beta = x^3 + x^2 + 2x + 1.$

En identifiant les coefficients on en déduit $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma + 2\alpha = 2$ c'est à dire $\gamma = 0$. La solution particulière (qu'on appellera y_p) est donc $y_p(x) = x^2 + x$.

Quelle que soit la solution y de l'équation (E_2), elle vérifie

$$\begin{aligned}(y - y_p)' + x(y - y_p) &= (y' + xy) - ({y_p}' + xy_p)\\ &= (x^3 + x^2 + 2x + 1) - (x^3 + x^2 + 2x + 1)\\ &= 0\end{aligned}$$

autrement dit la fonction $y - y_p$ est solution de (e_2). Comme on a calculé toutes les solutions de (e_2), on a $y(x) - y_p(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$ c'est à dire $y(x) = x^2 + x + Ce^{-\frac{x^2}{2}}$.

b) Équations différentielles linéaires du second ordre, à coefficients constants.

On considérera d'abord les équations différentielles sans second membre, pour lesquelles on va démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.4 *Pour résoudre l'équation différentielle*

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{2}$$

(où a, b et c sont des constantes réelles avec $a \neq 0$), on calcule d'abord les racines du polynôme $aX^2 + bX + c$:

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ et } r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{si } b^2 - 4ac > 0),$$

$$r = \frac{-b}{2a} \quad (\text{si } b^2 - 4ac = 0),$$

$$r_1 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \text{ et } r_2 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad (\text{si } b^2 - 4ac < 0).$$

Dans ce dernier cas, $r_1 = \alpha - i\beta$ et $r_2 = \alpha + i\beta$ avec

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \text{ et } \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Les solutions de l'équation différentielle (2) sont alors les fonctions

$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \quad (\text{dans le premier cas}),$$

$$y(x) = (\lambda x + \mu)e^{rx} \quad (\text{dans le second}),$$

$$y(x) = e^{\alpha x}\big(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)\big) \quad (\text{dans le troisième}),$$

quelles que soient les valeurs des constantes réelles λ et μ.

Démonstration partielle : Soit r un nombre (réel ou complexe) tel que $ar^2 + br + c = 0$. Alors la fonction $y(x) = e^{rx}$ est solution de l'équation (2) puisque

$$\begin{aligned}ay''(x) + by'(x) + cy(x) &= ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx}\\ &= (ar^2 + br + c)e^{rx}\\ &= 0.\end{aligned}$$

On vérifie de même que, si deux nombres r_1 et r_2 vérifient $a{r_1}^2 + br_1 + c = 0$ et $a{r_2}^2 + br_2 + c = 0$, alors les fonctions $y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ sont solutions de (2) (quelles que soient les valeurs des constantes λ et μ). Dans le cas $r_1 = r_2$ c'est à dire si le polynôme $aX^2 + bX + c$ n'a qu'une racine r, on vérifie aussi que les fonctions $y(x) = (\lambda x + \mu)e^{rx}$ sont solutions de (2). Dans ces deux cas on démontre qu'il n'y a pas d'autre solution (en se ramenant à des équations différentielles du premier ordre).

Dans la pratique, les coefficients a, b, c de l'équation sont réels et on s'intéresse aux solutions à valeurs réelles, c'est à dire il faut choisir les constantes λ et μ de façon que la valeur de $y(x)$ qu'on a trouvée appartienne à $\mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si le polynôme aX^2+bX+c a deux racines réelles r_1 et r_2 (distinctes ou confondues), alors il suffit de choisir λ et μ réels pour que $y(x)$ le soit aussi. Si ce polynôme a deux racines complexes $r_1 = \alpha - i\beta$ et $r_2 = \alpha + i\beta$, on est obligé de choisir deux constantes complexes $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ et $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ sinon $y(x)$ n'aurait aucune chance d'être réel. Faisons le calcul de $y(x)$:

$$\begin{aligned} y(x) &= \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \\ &= (\lambda_1 + i\lambda_2)e^{\alpha x - i\beta x} + (\mu_1 + i\mu_2)e^{\alpha x + i\beta x} \\ &= (\lambda_1 + i\lambda_2)e^{\alpha x}\big(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)\big) + (\mu_1 + i\mu_2)e^{\alpha x}\big(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\big) \\ &= (\lambda_1 + i\lambda_2 + \mu_1 + i\mu_2)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + (-i\lambda_1 + \lambda_2 + i\mu_1 - \mu_2)e^{\alpha x}\sin(\beta x). \end{aligned}$$

Remarquons que cette expression est de la forme $\gamma\cos(\beta x) + \delta\sin(\beta x)$. La constante γ vaut $\lambda_1 + i\lambda_2 + \mu_1 + i\mu_2$ et la constante δ vaut $-i\lambda_1 + \lambda_2 + i\mu_1 - \mu_2$; ces constantes sont réelles si et seulement si $\lambda_1 = \mu_1$ et $\lambda_2 = -\mu_2$. On a alors $\gamma = 2\lambda_1$ et $\delta = 2\lambda_2$ et, comme on peut choisir n'importe quelle valeur réelle pour λ_1 et λ_2, on le peut aussi pour γ et δ. Autrement dit la fonction y est solution de l'équation (2) si et seulement si il existe γ et δ réels tels que $y(x) = \gamma\cos(\beta x) + \delta\sin(\beta x)$. ■

Pour terminer expliquons comment résoudre dans certains cas les équations différentielles du second ordre de la forme

$$ay'' + by' + cy = d, \tag{3}$$

où d est une fonction, et a, b, c des constantes réelles.

On suppose que la fonction d est un polynôme, une exponentielle, un cosinus, un sinus, ou une somme de telles fonctions. On cherche une solution particulière de l'équation (3) sous la forme d'une fonction y qui soit un polynôme ou une exponentielle ou ... c'est à dire qui ait la même forme que la fonction d (ça marche sauf si la fonction d est elle-même une solution de l'équation (2)). On appelle y_p cette solution particulière et y une solution quelconque de l'équation (3), on a alors

$$\begin{aligned} a(y-y_p)'' + b(y-y_p)' + c(y-y_p) &= (ay'' + by' + cy) - (ay_p'' + by_p' + cy_p) \\ &= 0 - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $y - y_p$ est solution de l'équation différentielle (2), et c'est une des fonctions donnée par le théorème. On en déduit que les fonctions

$$\begin{aligned} y(x) &= y_p(x) + \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \quad (\text{si } b^2 - 4ac > 0) \\ &= y_p(x) + (\lambda x + \mu)e^{rx} \quad (\text{si } b^2 - 4ac = 0) \\ &= y_p(x) + e^{\alpha x}\big(\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x)\big) \quad (\text{si } b^2 - 4ac < 0) \end{aligned}$$

sont solutions de (3) quelles que soient les valeurs des constantes réelles λ et μ.

2.2 Fonctions réelles de deux variables réelles

Le terme "fonction réelle" signifie : fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$. Par exemple la fonction définie par $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ est à valeurs réelles puisque $\sqrt{x^2 + y^2}$ appartient à $\mathbb{R}$, mais c'est une fonction des deux variables réelles x et y. Les fontions réelles de deux variables réelles sont donc des applications $f : E \to \mathbb{R}$, où E est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. On s'est limité à ces fonctions pour simplifier l'écriture des définitions et des théorèmes, mais ceux-ci restent valables pour les fonctions de m variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, quels que soient les entiers strictement positifs m et n. Dans la pratique, les champs vectoriels sont des fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, de trois variables réelles ; la pression est une fonction, à valeurs dans $\mathbb{R}$, de trois variables réelles ; ...

a) Notion de limite et de continuité.

Intuitivement quand on dit qu'une fonction $f(x, y)$ tend vers une limite ℓ quand (x, y) tend vers (x_0, y_0), cela signifie que :

si (x, y) est proche de (x_0, y_0) alors $f(x, y)$ est proche de ℓ.

Autrement dit :

si $|x - x_0|$ et $|y - y_0|$ sont petits alors $|f(x,y) - \ell|$ est petit.

Ce qui se traduit par la définition suivante :

Définition 2.5 *Soit f une fontion réelle de deux variables réelles ; on dit qu'elle admet pour limite ℓ quand (x,y) tend vers (x_0,y_0) (en abrégé $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$) si*

quelque soit $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que, si $|x - x_0| \leq \alpha$ et $|y - y_0| \leq \alpha$, alors $|f(x,y) - \ell| \leq \varepsilon$.

Ceci permet de définir la continuité :

Définition 2.6 *Une fonction réelle f de deux variables réelles est dite continue en (x_0,y_0) si*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Elle est dite continue si, pour tout (x_0,y_0) dans son domaine de définition, elle est continue en (x_0,y_0).

Dans la pratique on sait que les fonctions usuelles d'une seule variable (c'est à dire les polynômes, exponentielles, fonctions trigonométriques, ...) sont continues sur leurs domaines de définition. On l'a démontré une fois pour toutes en utilisant la définition de la continuité, et on n'a donc plus à utiliser cette définition pour ces fonctions.

Les fonctions d'une ou plusieurs variables qui sont composées de fonctions usuelles sont continues sur leurs domaines de définition : c'est une conséquence du théorème suivant. Nous ne démontrerons pas ce théorème, la démonstration étant à peu près la même que pour les fonctions d'une variable.

Théorème 2.7 *(i) Si deux fonctions réelles f et g de deux variables réelles sont continues en (x_0,y_0), alors $f+g$, fg et (si $g(x_0,y_0) \neq 0$) $\dfrac{f}{g}$ sont continues en (x_0,y_0).*

(ii) Une fonction composée de la forme $\varphi(x,y) = f\big(u(x,y),v(x,y)\big)$ (en abrégé : $\varphi = f(u,v)$) est continue en (x_0,y_0) si u et v sont continues en ce point et si f est continue au point (u_0,v_0) (image de (x_0,y_0) par (u,v)).

(iii) Une fonction composée de la forme $\psi(x,y) = f(g(x,y))$ (où f est une fonction réelle d'une variable réelle et g une fonction réelle de deux variables réelles) est continue en (x_0,y_0) si g est continue en ce point et si f est continue au point $g(x_0,y_0)$.

Apparemment il n'y a plus de problème, toutes les fonctions qu'on peut avoir à utiliser sont continues sur leurs domaines de définition. Mais nous allons voir sur les exemples suivants dans quels cas il peut y avoir un problème de continuité.

Exemples : • Soit $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$. Cette fonction n'est pas définie en $(x,y) = (0,0)$. Compte tenu que $\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ est nul si une seule des deux variables x ou y est nulle, il est naturel de prolonger cette fonction au point $(0,0)$ en posant $f(0,0) = 0$, et alors elle sera définie sur $\mathbb{R}^2$. Elle était (au départ) continue en tout (x,y) sauf en $(x,y) = (0,0)$, il faut démontrer qu'elle est aussi continue en $(0,0)$. Pour cela écrivons la sous forme d'un produit de deux fonctions :

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot y. \tag{4}$$

La première fonction, c'est à dire $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$, est comprise entre 0 et 1 (parce qu'on a l'inégalité $0 \leq x^2 \leq x^2+y^2$ et, en divisant par x^2+y^2, on en déduit $0 \leq \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$). Ce qui permet de déduire de (4) l'inégalité

$$|f(x,y)| \leq |y|. \tag{5}$$

D'où la limite de $f(x,y)$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$: si x et y sont petits alors, d'après (5), $|f(x,y)|$ est petit et par conséquent la limite de $f(x,y)$ est nulle.

Compte tenu qu'on a posé $f(0,0)=0$, on a bien $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ c'est à dire f est continue en $(0,0)$.

• Soit $g(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Comme la précédente, cette fonction est continue en tout (x,y) sauf en $(x,y)=(0,0)$. Mais elle n'a pas pour limite 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$: même si x et y sont petits, quand $y=x$ on a $g(x,x)=\dfrac{x^2}{x^2+x^2}=\dfrac{1}{2}$. Tend-elle pour autant vers $\dfrac{1}{2}$? Non puisque quand x et y sont petits avec $y=-x$ on a $g(x,-x)=\dfrac{x(-x)}{x^2+(-x)^2}=\dfrac{-x^2}{2x^2}=-\dfrac{1}{2}$. On peut donc dire que la fonction g n'a pas de limite quand (x,y) tend vers $(0,0)$, et qu'elle n'est pas prolongeable par continuité au point $(0,0)$.

b) Dérivées partielles.

Soit f une fonction réelle de deux variables réelles ; pour obtenir ses dérivées partielles on fixe une des deux variables et on dérive par rapport à la deuxième. Les deux dérivées ainsi obtenues sont notées $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. On utilise le symbole ∂ plutôt que le symbole d, chaque fois qu'on a affaire à une fonction de plusieurs variables. On appelle *gradient de* f le vecteur $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Par exemple les dérivées partielles de $f(x,y)=x^2y^3+x^3$ sont les fonctions

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3+3x^2$ (compte tenu que, quand on dérive par rapport à x, on considère le terme y^3 comme une constante C, et la dérivée de Cx^2+x^3 est $2Cx+3x^2$),

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2$ (parce que maintenant on considère les termes x^2 et x^3 comme des constantes A et B, et en dérivant Ay^3+B on obtient $3Ay^2+0$).

c) Différentielle.

La notion de différentielle (d'une fonction de deux variables) est un peu plus compliquée que celle de dérivée ou de dérivée partielle.

Prenons d'abord comme exemple la fonction $f(x,y)=x^2y^3+x^3$, dont les dérivées partielles sont $2xy^3+3x^2$ et $3x^2y^2$. Au point $(x,y)=(1,2)$ par exemple, ces dérivées partielles valent $2\cdot 2^3+3=19$ et $3\cdot 2^2=12$. On appelle différentielle de f au point $(1,2)$ la fonction $\varphi(h,k)=19h+12k$. Cette fonction φ est notée habituellement $df(1,2)$, on a donc $df(1,2)(h,k)=19h+12k$.

Prenons un exemple plus simple : la fonction (d'une seule variable) $g(x)=x^2$ a pour dérivée $g'(x)=2x$. Au point $x=2$ par exemple cette dérivée vaut $g'(2)=4$. Sa différentielle au point $x=2$ est une fonction notée $dg(2)$ et définie par $dg(2)(h)=4h$ pour tout $h\in\mathbb{R}$. On peut voir sur cet exemple quel est le rapport entre la notion de dérivée et la notion de différentielle. Par définition, la dérivée de g au point $x=2$ est $g'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}$; en posant $h=x-2$ on a donc $4=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(2+h)-g(2)}{h}$ d'où $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(2+h)-g(2)-4h}{h}=0$. Généralisons : toute fonction g d'une seule variable, dérivable en x_0, vérifie

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)-hg'(x_0)}{h}=0 \tag{6}$$

et, dans cette expression, le terme $hg'(x_0)$ représente la différentielle de g au point x_0.

Par analogie avec cette dernière formule nous allons définir la différentielle d'une fonction de deux variables :

Définition 2.8 *Une fonction réelle f de de deux variables réelles est dite différentiable au point (x_0,y_0) s'il existe deux constantes a et b telles que*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-(ah+bk)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0. \tag{7}$$

On appelle alors "différentielle de f au point (x_0, y_0)" la fonction de deux variables (h et k), notée $df(x_0, y_0)$, et définie par

$$df(x_0, y_0)(h, k) = ah + bk. \tag{8}$$

On est en droit de se demander, par comparaison entre les formules (6) et (7), de quelle fonction les constantes a et b sont les dérivées ? Le théorème suivant répond à cette question.

Théorème 2.9 *Si f est différentiable au point (x_0, y_0) et si $df(x_0, y_0)(h, k) = ah + bk$, alors a et b sont les dérivées partielles de f en (x_0, y_0).*

Démonstration : Faisons $k = 0$ dans (7) ; on obtient $\lim_{h\to 0} \left(\pm \left(\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - ah}{h} \right) \right) = 0$ (avec le signe + si $h > 0$ et le signe − si $h < 0$). Ceci est équivalent à $\lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} - a \right) = 0$ et à $\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \right) = a$. Autrement dit la dérivée de $f(x, y)$, pour $y = y_0$ fixé et pour x variable tendant vers x_0, est égale à a : on retrouve la définition de la dérivée partielle par rapport à la première variable. La démonstration est la même pour la constante b (avec $x = x_0$ fixé et y variable tendant vers y_0). ∎

Pour terminer donnons l'interprétation géométrique de la différentielle. Pour une fonction g d'une variable, la valeur de la différentielle en un point x_0 est liée à l'équation de la tangente au point de coordonnées (x_0, y_0) (de la courbe de g), cette équation étant $y = (x - x_0)g'(x_0) + y_0$. L'existence de $g'(x_0)$ garantit l'existence de la tangente. Pour une fonction f de deux variables, la valeur de la différentielle donnée par la relation (8) est liée à l'équation du plan tangent au point (x_0, y_0, z_0) (de la surface représentative de f) : cette équation est $z = a(x - x_0) + b(y - y_0) + z_0$. L'existence du plan tangent n'est pas garantie par l'existence des dérivées partielles, c'est à dire de a et b : le plan tangent existe au point (x_0, y_0, z_0) si et seulement si f est différentiable en (x_0, y_0).

d) Quelques théorèmes.

Si une fonction de deux variables est définie au moyen de fonctions usuelles (c'est à dire, définie par une formule faisant intervenir des sommes, produits, quotients et des composées de fonctions usuelles), elle est différentiable sur le domaine de définition de ses dérivées partielles. Pour le vérifier, on utilise non pas la définition de la différentiabilité mais le théorème suivant :

Théorème 2.10 *Soit f une fonction réelle de deux variables réelles. Si ses dérivées partielles sont définies et continues en un point (x_0, y_0), alors f est différentiable en (x_0, y_0).*

Démonstration : Il faut prouver que la condition (7) est vérifiée.

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-(ah+bk)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)-ah}{\sqrt{h^2+k^2}} + \frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)-bk}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)-ah}{h} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} + \frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)-bk}{k} \cdot \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}. \end{aligned}$$

où a et b sont les dérivées partielles de f au point (x_0, y_0). Ce point est fixé, et le couple de variables (h, k) tend vers $(0, 0)$.

Le rapport $\dfrac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$ est le taux d'accroissement de la fonction (d'une seule variable y) $f(x_0, y)$. Par définition de la dérivée (des fonctions d'une seule variable) le taux d'accroissement tend vers la dérivée, c'est à dire $\dfrac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$ tend vers la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ qui vaut b. Ceci équivaut à dire que $\dfrac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - bk}{k}$ tend vers 0.

Quant au rapport $\dfrac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$, on vérifie facilement qu'il est compris entre -1 et 1, et par conséquent le produit $\dfrac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - bk}{k} \cdot \dfrac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ tend vers 0.

La démonstration est un peu différente pour $\dfrac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)-ah}{h}\cdot\dfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}$: il faut prouver que le rapport $\dfrac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)}{h}$ tend vers la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ quand (h,k) tend vers $(0,0)$, c'est à dire qu'il a même limite que le taux d'accroissement $\dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$ (en fait il existe des fonctions f pour lesquelles ce n'est pas le cas). Cependant d'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel c compris entre x_0 et x_0+h tel que $\dfrac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)}{h}$ soit égal à la dérivée (par rapport à x) de la fonction $f(x,y_0+k)$ au point c, c'est à dire

$$\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)}{h}=\frac{\partial f}{\partial x}(c,y_0+k).$$

Comme on a supposé les dérivées partielles continues, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(c,y_0+k)$ tend vers $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ (c'est à dire vers a) quand (h,k) tend vers $(0,0)$. On en déduit que la limite de $\dfrac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)-ah}{h}$ est nulle, de même que celle de $\dfrac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)-ah}{h}\cdot\dfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}$ puisque $\dfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}$ est compris entre -1 et 1. ■

Le théorème de Schwarz permet de dériver plusieurs fois une fonction par rapport à ses différentes variables, indépendamment de l'ordre des dérivations (voir http ://fr.wikipedia.org/Théorème_de_Schwarz pour la démonstration) :

Théorème 2.11 *Soit f une fonction réelle de deux variables réelles. Si les dérivées partielles $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ (c'est à dire la dérivée de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ par rapport à x) et $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ (la dérivée de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à y) existent en tout point (x,y) du domaine de définition de f, et si elles sont continues en un point (x_0,y_0), alors elles sont égales en ce point.*

e) Dérivation des fonctions composées (ou formule de dérivation en chaîne).

On sait que dans le cas des fonctions d'une variable, la dérivée de $f(g(x))$ est $f'(g(x))\cdot g'(x)$. Que devient cette formule dans le cas où il y a plusieurs variables ? Nous nous placerons dans le cas le plus simple, en composant une fonction de deux variables avec deux fonctions d'une variable.

Théorème 2.12 *Soit f une fonction différentiable réelle de deux variables réelles, et soient φ et ψ deux fonctions dérivables d'une variable réelle. Soit f_1 la fonction composée, définie par $f_1(t)=f(\varphi(t),\psi(t))$. Elle a pour dérivée*

$$f_1'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t),\psi(t))\cdot\varphi'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t),\psi(t))\cdot\psi'(t)$$

(en abrégé : $\dfrac{df}{dt}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$).

Démonstration : Soit t_0 un point du domaine de définition de f_1, on veut démontrer que

$$f_1'(t_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t_0),\psi(t_0))\cdot\varphi'(t_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t_0),\psi(t_0))\cdot\psi'(t_0)=0. \tag{9}$$

On sait que la dérivée d'une fonction d'une variable est la limite de son taux d'accroissement. Par conséquent (9) équivaut à

$$\lim_{t\to t_0}\left(\frac{f_1(t)-f_1(t_0)}{t-t_0}-a\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}-b\frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{t-t_0}\right)=0, \tag{10}$$

avec $a=\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t_0),\psi(t_0))$ et $b=\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t_0),\psi(t_0))$. Pour démontrer (10) il suffit de comparer cette relation avec la relation (7), qu'on a supposée vraie puisqu'on a supposé f différentiable.

En posant $x_0=\varphi(t_0)$ et $y_0=\psi(t_0)$ on a $f_1(t_0)=f(x_0,y_0)$. En posant $h=\varphi(t)-\varphi(t_0)$ et $k=\psi(t)-\psi(t_0)$ (qui sont des fonctions de t) on a $\varphi(t)=x_0+h$ et $\psi(t)=y_0+k$ donc $f_1(t)=f(x_0+h,y_0+k)$. Finalement

la relation (10) équivaut à

$$\lim_{t\to t_0}\left(\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-(ah+bk)}{t-t_0}\right)=0$$

et à

$$\lim_{t\to t_0}\left(\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-(ah+bk)}{\sqrt{h^2+k^2}}\cdot\frac{\sqrt{h^2+k^2}}{t-t_0}\right)=0. \tag{11}$$

C'est la limite d'un produit ; le premier terme de ce produit tend vers 0 d'après (7) ; le second terme vaut

$$\frac{\sqrt{h^2+k^2}}{t-t_0}=\pm\sqrt{\frac{h^2}{(t-t_0)^2}+\frac{k^2}{(t-t_0)^2}}=\pm\sqrt{\left(\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\right)^2+\left(\frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{t-t_0}\right)^2}$$

et il tend vers une limite finie (plus précisément il tend vers $\pm\sqrt{(\varphi'(t_0))^2+(\psi'(t_0))^2}$ avec le signe + si t tend vers t_0 à droite et − s'il tend vers t_0 à gauche). La relation (11) est donc vérifiée, d'où le théorème. ■

Application Soit f une fonction réelle de deux variables réelles x et y, qu'on considère comme les coordonnées d'un point M du plan. On veut calculer les dérivées partielles de f, non pas par rapport à x et y mais par rapport aux coordonnées polaires ρ et θ du point M. D'abord par manque de chance x et y sont fonctions de deux variables : $x=\rho\cos\theta$ et $y=\rho\sin\theta$, alors que le théorème s'applique aux fonctions d'une seule variable. Mais, s'agissant de dérivées partielles, on fixe une des deux variables, par exemple θ, et x et y sont alors fonctions de la seule variable variable ρ. Comme les dérivées de $\rho\cos\theta$ et $\rho\sin\theta$ par rapport à ρ sont respectivement $\cos\theta$ et $\sin\theta$, le théorème donne la formule

$$\frac{\partial f}{\partial\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\sin\theta.$$

(on a utilisé le symbole ∂ au lieu de d parce que f est fonction des deux variables ρ et θ). De même en dérivant par rapport à θ, le théorème donne

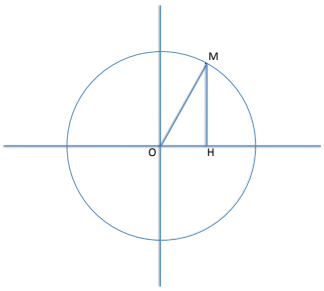
$$\frac{\partial f}{\partial\theta}=-\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\rho\sin\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\rho\cos\theta.$$

2.3 Courbes

a) Équation d'une courbe plane (exemples).

L'équation d'une courbe plane $\mathcal{C}$ donne la condition sur x et y pour que le point $M(x,y)$ appartienne à $\mathcal{C}$. Par exemple on sait que l'équation de la droite de pente a passant par le point $B(0,b)$ est $y=ax+b$. L'équation du cercle de centre $\Omega(x_0,y_0)$ et de rayon R peut être donnée sous la forme $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$. Prenons l'exemple du cercle trigonométrique (de centre O et de rayon 1) :

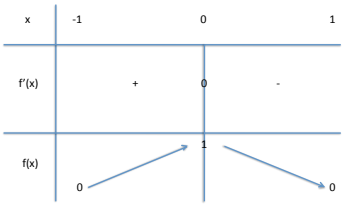
$x^2+y^2=1$

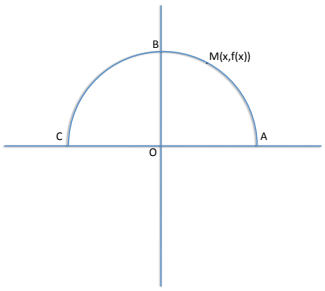


Par le théorème de Pythagore, $OM^2=OH^2+HM^2=x^2+y^2=1$ donc le point $M(x,y)$ est à distance 1 du point O c'est à dire il est sur le cercle de centre O et de rayon 1.

On peut aussi mettre l'équation du cercle trigonométrique sous la forme $y = f(x)$: la relation $x^2+y^2 = 1$ équivaut à $y^2 = 1 - x^2$ c'est à dire $y = \sqrt{1-x^2}$ ou $-\sqrt{1-x^2}$. Faisons l'étude de la fonction $\sqrt{1-x^2}$:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$
$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

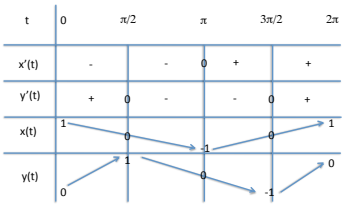


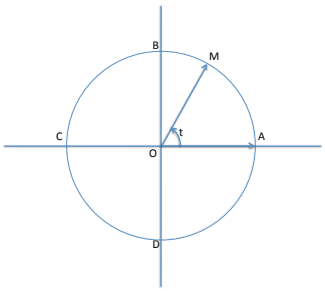


D'après ce tableau de variations le point $A(1,0)$ correspond à un minimum de la fonction f, le point $B(0,1)$ à un maximum et le point $C(-1,0)$ à un minimum. La courbe de f est un demi cercle, pour avoir le cercle entier il faudrait ajouter la courbe de la fonction $g(x) = -\sqrt{1-x^2}$.

Pour avoir une représentation paramétrique du cercle trigonométrique, on remarque que deux réels x et y vérifient la relation $x^2 + y^2 = 1$ si et seulement si il existe un réel t tel que $x = \cos t$ et $y = \sin t$, et ces deux équations constituent une des représentation paramétrique possibles du cercle. Géométriquement, t est l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{OA}(1,0)$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}(x,y)$. On peut construire la courbe à partir de sa représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -\sin t \\ y'(t) = \cos t \end{cases}$$



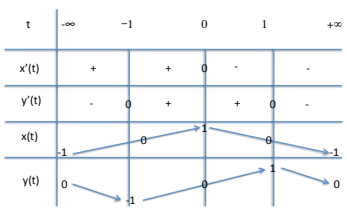


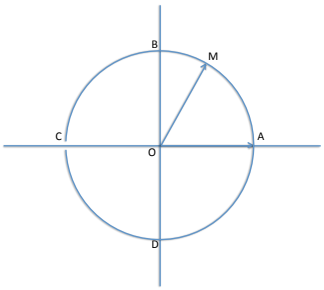
Le tableau de variations s'interprète graphiquement de la façon suivante : comme la fonction $x(t)$ varie entre $x(\pi) = -1$ et $x(0) = x(2\pi) = 1$, la courbe est comprise entre la droite verticale d'équation $x = -1$ et la droite verticale d'équation $x = 1$, et par conséquent elle est tangente à la première droite au point $C(x(\pi), y(\pi)) = C(-1,0)$ et à la deuxième au point $A(1,0)$. De même, elle admet des tangentes horizontales aux points $B(0,1)$ et $D(0,-1)$.

Il y a aussi l'interprétation mécanique : t représente le temps et, dans cet exemple, il représente aussi l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right)$, par conséquent le point M se déplace à vitesse constante sur le cercle en partant du point A (au temps $t = 0$) pour passer par B, C, D et retourner en A (au temps $t = 2\pi$).

Donnons une autre représentation paramétrique (dite rationnelle) du cercle trigonométrique :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = \dfrac{-4t}{(1+t^2)^2} \\ y(t) = \dfrac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \end{cases}$$





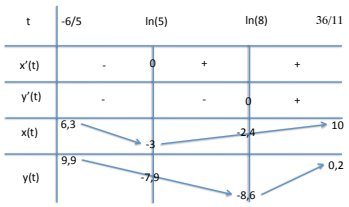
La courbe est un cercle parce qu'on peut vérifier par le calcul que $\big(x(t)\big)^2+\big(y(t)\big)^2$ vaut 1. Le point $C(-1,0)$ n'est jamais atteint : il n'existe pas t tel que $(x(t),y(t))=(-1,0)$, par contre la limite de $(x(t),y(t))$ quand $t\to\pm\infty$ est $(-1,0)$. Les points D,A,B sont atteints respectivement pour $t=-1$, $t=0$ et $t=1$.

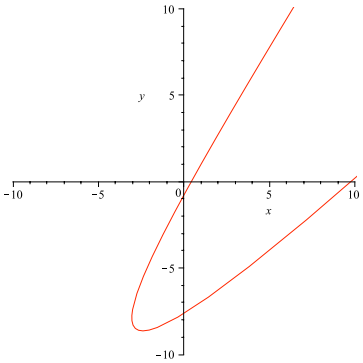
L'interprétation mécanique de ce paramétrage du cercle est moins naturelle : ce n'est pas le point T (intersection de la droite (OM) avec la droite verticale d'équation $x=1$) qui se déplace à vitesse constante mais le point T' d'abscisse 1 tel que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OT'}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)$.

Autre exemple un peu plus compliqué : la courbe paramétrée d'équations $\begin{cases} x(t)=e^t-5t \\ y(t)=e^t-8t \end{cases}$ n'est pas une courbe d'équation $y=f(x)$, avec f composée de fonctions usuelles. En effet il n'est pas possible de calculer t en fonction de $x(t)$ et encore moins de calculer $y(t)$ en fonction uniquement de $x(t)$.

On se limitera à l'intervalle $t\in\left[-\frac{6}{5},\frac{36}{11}\right]$ de façon que $x(t)$ et $y(t)$ ne dépassent pas 10 :

$$\begin{cases} x(t)=e^t-5t \\ y(t)=e^t-8t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t)=e^t-5 \\ y(t)=e^t-8 \end{cases}$$





D'après le tableau de variations la courbe est incluse dans le quart de plan délimité par la droite d'équation $x=5-5\ln(5)\simeq -3$ (parce que $x(t)\geq 5-5\ln(5)$ pour tout t) et la droite d'équation $y=8-8\ln(8)\simeq -8,6$ (parce que $y(t)\geq 8-8\ln(8)$ pour tout t). Ces deux droites sont tangentes à la courbe aux points de contacts. Au temps $t=-\frac{6}{5}$ le point $M(x(t),y(t))$ a pour coordonnées $6,3$ et $9,9$, et au temps $t=\frac{36}{11}$ il a pour coordonnées 10 et $0,2$; au temps $t=0$ il a pour coordonnées $(1,1)$ et par conséquent la courbe passe en dessous de l'origine. Pour la dessiner il suffit de placer le point de coordonnées $(1,1)$ et les quatre points considérés dans le tableau de variations, puis de tracer une courbe la plus régulière possible qui relie ces cinq points.

b) Ce qu'il faut savoir sur les courbes paramétrées.

Définition 2.13 _ *La courbe paramétrée définie par deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ est l'ensemble des points $M(x(t),y(t))$ (pour tout t dans le domaine de définition des fonctions x et y).*

_ *Un point $M(x(t),y(t))$ est dit singulier si $x'(t)=y'(t)=0$.*

_ *On dit qu'un point M est double s'il existe t_1 et t_2 distincts tels que $x(t_1)=x(t_2)$ et $y(t_1)=y(t_2)$ soient les coordonnées de M.*

_ *On dit que la courbe admet une branche infinie en $t\to t_0$ si $\lim\limits_{t\to t_0}x(t)$ ou $\lim\limits_{t\to t_0}y(t)$ est infini, et qu'elle admet pour asymptote la droite d'équation $ax+by+c=0$ si $\lim\limits_{t\to t_0}(ax(t)+by(t)+c)=0$.*

Les définitions sont analogues pour les courbes paramétrées dans l'espace (appelées *courbes gauches*), définies par trois fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

Théorème 2.14 _ *La pente de la tangente au point $M(x(t),y(t))$ est égale à $\frac{y'(t)}{x'(t)}$ si $x'(t)\neq 0$. Cette tangente est verticale si $x'(t)=0$ et $y'(t)\neq 0$.*

_ *Si la courbe admet une asymptote (D) quand $t\to t_0$, alors la distance du point $M(x(t),y(t))$ à la droite (D) tend vers 0 quand $t\to t_0$.*

_ *Supposons que les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ soient définies sur $\mathbb{R}$ ou sur un intervalle $[-a,a]$. Alors la courbe est*

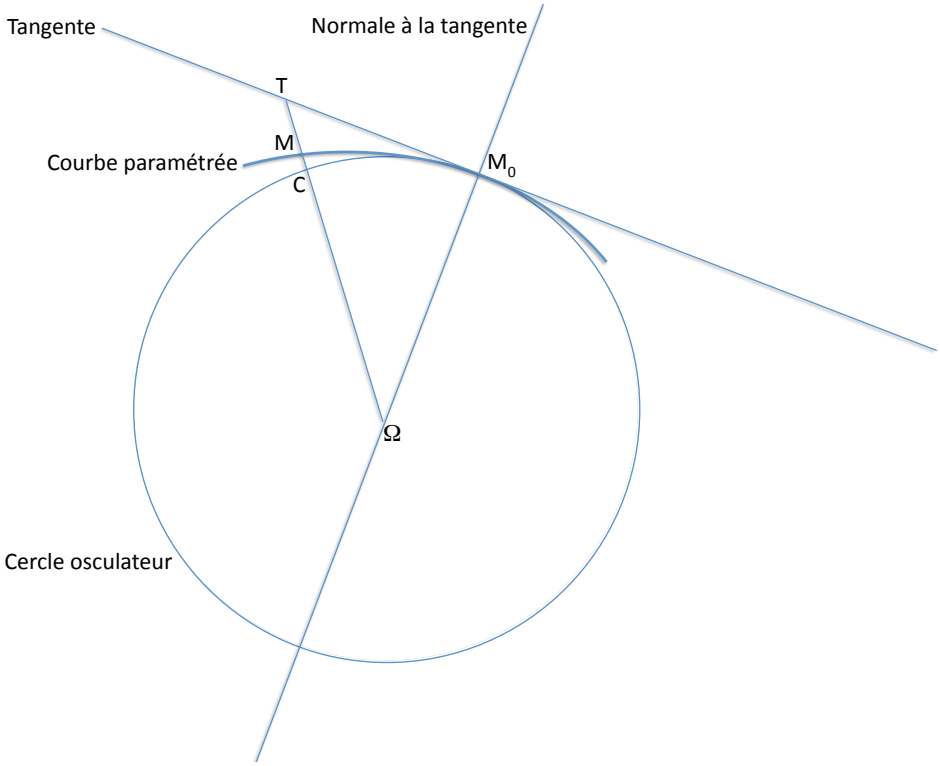
symétrique par rapport à l'axe des x si $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$;

symétrique par rapport à l'axe des y si $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$;

symétrique par rapport à l'origine si $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$.

c) Quelques autres définitions et formules.

On considère une courbe paramétrée, et un point M_0 de cette courbe. Remarquons d'abord que tout cercle centré sur la droite orthogonale à la tangente à la courbe au point M_0, admet la même tangente en ce point ; ces cercles sont donc proches de la courbe au voisinage de M_0. Parmi eux, un seul cercle possède la propriété suivante :



le rapport $\dfrac{CM}{CT}$ tend vers 0 quand le point M (de la courbe paramétrée) tend vers M_0. Ce cercle s'appelle *cercle osculateur*, son rayon $R = \Omega M_0$ s'appelle *rayon de courbure*. Ce qu'on appelle *courbure au point* M_0 c'est $\rho = \dfrac{1}{R}$.

Le calcul (voir http ://fr.wikipedia.org/wiki/Courbure_d'un_arc) donne $\rho = \dfrac{|x'_0 y''_0 - y'_0 x''_0|}{{v_0}^3}$, où x'_0 et y'_0 sont les dérivées des fonctions x et y au temps $t = t_0$, x''_0 et y''_0 sont leurs dérivées secondes, et $v_0 = \sqrt{{x'_0}^2 + {y'_0}^2}$ est la vitesse du point M au temps $t = t_0$.

La définition géométrique du cercle osculateur est la même dans le cas d'une courbe dans l'espace. Le plan qui contient ce cercle s'appelle *plan osculateur*.

D'autre part la longueur de la courbe parcourue par le point $M\big(x(t), y(t)\big)$ entre le temps t_1 et le temps t_2 est égale à $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\, dt$.

d) Classification des coniques (http ://fr.wikipedia.org/wiki/Conique).

On appelle *conique* toute courbe d'équation $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \varphi = 0$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$ sont des constantes réelles. On démontre qu'une telle courbe est soit un cercle, une ellipse, une hyperbole ou une parabole, sauf dans des cas particuliers ou on obtient une ou deux droites, un point, ou un ensemble vide.

Pour s'en convaincre donnons trois exemples :

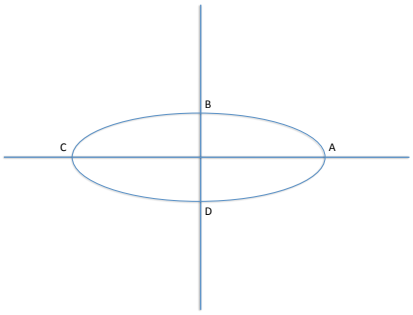
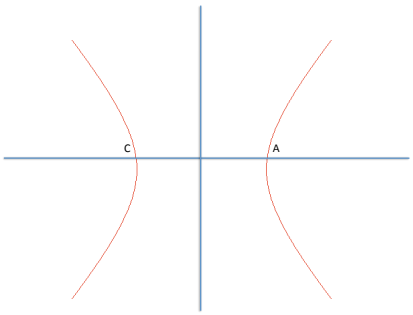
$x^2 + x + y + 1 = 0$ est l'équation d'une parabole puisqu'elle équivaut à $y = -x^2 - x - 1$;

$x^2 + y^2 - 1 = 0$ est l'équation du cercle trigonométrique ;

$x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$ équivaut à $(x - y)^2 = 1$ ce qui fait $x - y = 1$ ou $x - y = -1$: on obtient deux droites, d'équations $y = x - 1$ et $y = x + 1$.

Donnons d'autres exemples plus généraux. D'abord l'équation du cercle de rayon R centré à l'origine est $x^2 + y^2 = R^2$, ce qu'on peut mettre sous la forme $\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 = 1$. Plus généralement, quelles que soient les constantes a et b,

$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ est l'équation de l'ellipse centrée à l'origine et qui passe par les points $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $C(-a, 0)$, $D(0, -b)$:



$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ est l'équation de l'hyperbole qui passe par les points $A(a, 0)$ et $C(-a, 0)$ et admet pour asymptote les droites d'équation $y = \pm\frac{b}{a}x$: