$\boxed{\text{Algèbre linéaire}}$

Martine Quinio

28 mars 2013

Résumé

Le cours commence par une introduction aux matrices 2 lignes et 2 colonnes afin de traiter un problème de population ; puis, on met en place l'outil vectoriel et on fait grossir les matrices...

1 Un problème concret...

Sur une île déserte, on introduit l'année 0 un couple de lapins qui donnera naissance après un an d'existence à un autre couple de lapins ; dès qu'un couple de lapins est mature, il donne naissance chaque année à un couple de lapins :

Comment calculer l'évolution théorique de cette population U_n de lapins qui satisfait aux conditions $U_0 = U_1 = 1; U_{n+1} = U_n + U_{n-1}$?

Ce problème (Lapins de Fibonacci) qu'on appellerait aujourd'hui "expérience de pensée", a été traité par le mathématicien italien Léonard de Pise, dit Fibonacci, au XII siècle.

On a facilement
$U_2 = 2; U_3 = 3; U_4 = 5; U_5 = 8;$

La suite (1,1, 2, 3, 5, 8, 13, 21....) est la suite de Fibonacci.

Cette suite fait intervenir le nombre d'or...

Mettons en évidence la commodité de l'outil vectoriel qui va permettre de remplacer un problème à deux "étages" par un problème plus simple à une dimension.

On pose $V_n = \begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \end{pmatrix}$, et un tableau : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$: alors on pose

$$V_{n+1} = MV_n$$

Ainsi sont définis une matrice et le produit de cette matrice par un vecteur. En fait, V_n est une matrice unicolonne.

Le calcul de l'évolution de cette population se fera par la possibilité de calculer les puissances de la matrice M : c'est un problème qui formellement ressemble au calcul que l'on sait faire des éléments d'une suite géométrique...

On va mettre en place des objets nouveaux...

2 Matrices carrées d'ordre 2

Définition 2.1 *On appelle matrice carrée d'ordre 2 tout tableau 2 lignes et 2 colonnes dont les éléments sont des réels a, b, c, d :* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Définition 2.2 *Pour tout couple (x,y) de réels et toute matrice* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$*, on définit un produit noté* $MU, U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *de la façon suivante :* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = U'$*,avec :*

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

Il faut voir ici la matrice comme moyen de transformer un vecteur en un autre vecteur.
A partir de cela, les opérations sur les matrices vont être facilement définies :

2.1 Opérations sur les matrices

2.1.1 L'addition de matrices

Il s'agit de faire en sorte qu'une cohérence soit respectée : étant données 2 matrices M et N, il est naturel de poser par définition :

$$(M + N)U = MU + NU$$

Pout tout $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Posons : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$
Alors,

$$M + N = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

2.1.2 Multiplication par un scalaire

De la même façon et avec les mêmes notations, on pose pour tout réel λ : $(\lambda M)U = \lambda(MU)$
Alors une nouvelle matrice est définie :

$$\lambda M = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

2.1.3 Multiplication de matrices

Encore avec les mêmes notations, on va définir cette fois le produit NM :

$$(NM)U = N(MU)$$

Il est en effet naturel de pouvoir déplacer les parenthèses...
Grâce au calcul de MU, puis de $N(MU)$, on a facilement :

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix}$$

Exemple 2.1 *Calculons M^2, M^3 ...où $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$: on obtient :*

$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$...

Remarque 2.1 *Ce produit n'est pas commutatif :*

Effectuons $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 15 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 17 \end{pmatrix}$

On est bientôt en mesure de résoudre le probème initial ; allons plus loin dans les opérations :

Avant cela, voyons des matrices particulières qui vont jouer un rôle...

1. *Matrice identité* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,appelée ainsi parce que : $IU = U$, pour tout $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
2. *Matrices diagonales :* $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$

Remarquons, on peut faire une récurrence immédiate, que $D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & d^n \end{pmatrix}$

1. *Matrices triangulaires :* $T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$, ou bien $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$
2. *La matrice nulle* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matrice inverse Par analogie avec l'inverse d'un réel, on pose, sans savoir encore si ce problème a une solution :

Définition 2.3 *La matrice M est inversible s'il existe une matrice notée M^{-1} telle que $MM^{-1} = M^{-1}M = I$*

Ce problème encore une fois se résout à l'aide de $MU = U\prime$:
Il suffit d'inverser le système :

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

Si $ad - bc \neq O$: alors :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{ad-bc}(dx - by) \\ y = \frac{1}{ad-bc}(-cx + ay) \end{cases}$$

Alors la matrice inverse de $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $M^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Définition 2.4 *On donne le nom de déterminant de la matrice* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *au réel noté*

$$DetM = ad - bc$$

3 Application : une matrice pour deux problèmes...

3.1 Résolution d'un système différentiel

Le calcul matriciel en dimension 2 nous permet de résoudre le problème suivant :

Comment résoudre un *système* différentiel : x(t) et y(t) sont les coordonnées d'un point en fonction de la variable t : soit par exemple le système suivant avec les conditions initiales $x(0) = a$ et $y(0) = b$

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = -5x(t) - 4y(t) \end{cases}$$

On procède ainsi : c'est un problème à deux dimensions ;

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$$

Le problème se traduit matriciellement par :

$$X\prime(t) = AX(t)$$

Si M était une matrice diagonale, on aurait à résoudre indépendamment deux équations différentielles :

Essayons de trouver une matrice diagonale associée au problème...

On va procéder étape après étape :

1) Déterminer les solutions de l'équation $det(A - \lambda I) = 0$

2) Choisir pour chacune des deux valeurs obtenues un vecteur $u = (x_\lambda, y_\lambda)$
tel que : $AU = \lambda U$

3) Ecrire la matrice P dont les colonnes sont les composantes des vecteurs choisis.

4) Ecrire la matrice inverse P^{-1} et montrer que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale que l'on appelle D.

5) Poser $X_1(t) = P^{-1}X(t)$;et $X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$

Former le système d'équations associé à cette écriture matricielle ;

Montrer que $X_1'(t) = P^{-1}X'(t)$ et que $X_1'(t) = DX_1(t)$

En déduire facilement $X_1(t)$, puis, $X(t)$ satisfaisant aux conditions initiales : $x(0) = a$ et $y(0) = b$

Solution de ce problème :

1) On obtient les solutions de l'équation $det(A - \lambda I) = 0$: ce sont 1 et -3, solutions de l'équation $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$.

2) Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: pour $\lambda = 1$:

$AU = U$ si $\begin{cases} 2x + y = x \\ -5x - 4y = y \end{cases}$ les deux équations se réduisent à une seule : $x + y = 0$:

On peut choisir : $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ par exemple ;

De même, on peut choisir pour l'autre solution $\lambda = -3$: $U_{-3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ par exemple

3) La matrice P est alors : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$

4) La matrice inverse P^{-1} est : $P^{-1} = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

la matrice $P^{-1}AP$ est après calcul : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = D$

C'est bien une matrice diagonale, dont les éléments de la diagonale sont, quels que soient les choix de U_λ les solutions de l'équation $det(A - \lambda I) = 0$: 1 et -3 ;

5) Alors posons $X_1(t) = P^{-1}X(t)$:

On a $X_1'(t) = P^{-1}X'(t)$ parce qu'on peut dériver chaque ligne du système $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

Le système d'équations associé à cette écriture matricielle étant :

$$\begin{cases} \frac{-1}{4}(-5x(t) - y(t)) = x_1(t) \\ \frac{-1}{4}(x(t) + y(t)) = y_1(t) \end{cases}$$

Cherchons une relation entre $X_1'(t)$ et $X_1(t)$

On a $X_1'(t) = P^{-1}X'(t)$ et

$$X\prime(t) = AX(t)$$

Donc $X_1'(t) = P^{-1}AX(t)$

Comme $X_1(t) = P^{-1}X(t)$, alors : $X(t) = PX_1(t)$

Donc : $X_1'(t) = (P^{-1}A)X(t) = (P^{-1}AP)X_1(t) = DX_1(t)$:

Donc :

$$X_1'(t) = DX_1(t)$$

Mais D est diagonale : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = D$

Donc $\begin{cases} x_1(t) = x_1'(t) \\ -3y_1(t) = y_1'(t) \end{cases}$

On sait résoudre : les fonctions sont séparées !

On obtient : $x_1(t) = k \exp t$ et $y_1(t) = k' \exp(-3t)$; k et k' étant des constantes ;

Comme $X(t) = PX_1(t)$, on a facilement $X(t)$:ensuite, à l'aide des conditions initiales, on trouve les solutions du problème :

Ce sont

$$x(t) = \frac{1}{4}(5a + b)\exp t - \frac{1}{4}(a + b)\exp(-3t)$$

et

$$y(t) = -\frac{1}{4}(5a+b)\exp t + \frac{5}{4}(a+b)\exp(-3t)$$

3.2 Puissances d'une matrice

Le travail précédent nous est encore utile pour trouver les puissances de la matrice A précédente :

Comme $P^{-1}AP = D$, on a : $P^{-1}DP = A$ (il suffit de multiplier la relation $P^{-1}AP$ à gauche par P et à droite par P^{-1})

Or, comme D est diagonale, il est facile de voir que les puissances de D sont :

$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$$

:

or on a : $P^{-1}D^nP = A^n$ (par une récurrence immédiate)

Donc le calcul de A^n est facile : par exemple, on a

$$A^{10} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5-3^{10} & 1-3^{10} \\ -5(1-3^{10}) & 5.3^{10}-1 \end{pmatrix}$$

Pour aller plus loin..

3.3 Résolution du problème d'introduction

Une méthode efficace de calcul de puissance de matrice...objectif : connaître l'évolution de la fameuse population U_n de lapins...

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dont on se propose de calculer les puissances :

1) Ecrire la relation $A^2 - tr(A)A + det(A)I$ pour cette matrice;

2) On note P(X) le polynöme $P(X) = X^2 - X - 1$: résoudre $P(X) = 0$.

La division euclidienne de X^n par $P(X)$ donne la relation $X^n = P(X)Q_n(X) + R_n(X)$:

Quel est le degré de $R_n(X)$? On note $R_n(X) = a_nX + b_n$:Calculer alors $\text{R}_n(\text{X})$ en utilisant les solutions φ et φ' de $P(X) = 0$, sans calculer $Q_n(X)$;

3) Montrer que $A^n = a_nA + b_nI$

4) Expliciter alors A^n : le problème des puissances de A est résolu...du même coup :

5) Montrer que $U_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{n+1}$. Quelle est la limite du rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$?

SOLUTION

1) On a la relation $A^2 - A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) Le polynöme $P(X) = X^2 - X - 1$ a pour solutions $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \varphi'$

La division euclidienne de X^n par $P(X)$ donne la relation $X^n = P(X)Q_n(X) + R_n(X)$: le degré de $R_n(X)$ est 0 ou 1 : on peut poser $R_n(X) = a_nX + b_n$

En remplaçant X par $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, on trouve : $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n = a_n\frac{1+\sqrt{5}}{2} + b_n = a_n\varphi + b_n$

et $(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n = a_n\varphi' + b_n$:

D'où $a_n = \dfrac{\varphi^n - \varphi'^n}{\varphi - \varphi'}$, et $b_n = \dfrac{\varphi\varphi'^n - \varphi'\varphi^n}{\varphi - \varphi'}$

3) On a $A^n = a_n A + b_n I$ car $P(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

4) Ainsi, on a $A^n = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ a_n & a_n + b_n \end{pmatrix}$

5) La population de lapins le mois n est U_n ; elle équivaut à $\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{n+1}$ quand n tend vers l'infini, car :

$V_n = \begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \end{pmatrix} = A^n V_0 = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ a_n & a_n + b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc : $U_n = a_n + b_n$:

Comme $|\varphi'| < 1, \lim \varphi'^n = 0$:

On alors $U_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{n+1}$, et surtout, le rapport $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ tend vers $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, le nombre d'or.

4 Espaces vectoriels, bases, dimension

On va donner un cadre théorique permettant d'utiliser l'outil matriciel.

Donnons d'abord des rappels (pas sûr...) sur les ensembles usuels qui seront utiles ici ; les étudiants ne connaissent pas forcément les notations :

On note : $\mathbb{R}^n$: l'ensemble des n-uplets (x_1,x_2, ...x_n), les x_i étant réels ;

On définit dans $\mathbb{R}^n$ deux opérations :

- L'addition : $(x_1, x_2, ...x_n) + (y_1, y_2, ...y_n)$ =$((x_1 + y_1), (x_2 + y_2), ...(x_n + y_n))$

–La multiplication par un scalaire $\lambda(x_i)_{i\leq n}$ =$(\lambda x_i)_{i\leq n}$

On note : $\mathbb{R}[X]$: l'ensemble des polynômes à coefficients réels, $\mathbb{R}_n[X]$: l'ensemble formé du polynôme nul et des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n :

On définit dans $\mathbb{R}[X]$ deux opérations :

- L'addition : $(P + Q)(X) = P(X) + Q(X)$

–La multiplication par un scalaire $(\lambda P)(X) = \lambda P(X)$

Dans E_2 l'ensemble des vecteurs du plan , E_3 l'ensemble des vecteurs de l'espace, on a défini ces opérations ; alors :

4.1 Qu'y a-t-il de commun entre $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}[X]$, $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$?

4.1.1 Des vecteurs pas comme les autres...

Plus précisémént :

Peut-on dégager une structure commune entre des ensembles aussi divers que :
$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}[X]$, $\mathrm{M}_2(\mathbb{R}), E_2, E_3$...?

On peut définir dans chacun d'eux :

- Une addition dont le résultat est un élément de l'ensemble ;
- Une multiplication par un scalaire réel, dont le résultat est un élément de l'ensemble ;

et ces opérations possèdent des caractéristiques communes ; un élément neutre :

L'élément neutre de $\mathbb{R}^2$ *muni de l'addition est (0,0), celui de* $\mathbb{R}^3$: $(0, 0, 0)$, *celui de* $\mathbb{R}[X]$: *le polynôme nul, celui de* $M_2(\mathbb{R})$: *la matrice nulle, celui de* E_2 : $\overrightarrow{0}$...

Ensemble E :	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}[X]$	$\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$	E_2
Stabilité pour la somme ?	oui	oui	oui	oui	oui
Multiplication par scalaire	λx	$(\lambda x_i)_{i\leq n}$	$\lambda P(X)$	$\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$	$\lambda\overrightarrow{u}$
Neutre	0	(0,0,...0)	Polynôme nul	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{0}$

Dans les ouvrages d'algèbre linéaire, on trouve la définition d'un *espace vectoriel :*

Il s'agit d'un ensemble muni des 2 opérations définies ci-dessus dans lesquels les calculs peuvent s'effectuer avec les mêmes règles :

Ce qu'ils ont en commun est la façon de combiner les éléments à l'intérieur des ensembles- les opérations, les règles de calcul- même si les ensembles sont très différents.

Ils ont tous un élément neutre pour l'addition.

On dira alors que, munis de ces 2 opérations, ces ensembles possèdent une structure commune que l'on désigne par espace vectoriel (référence à E_2, E_3).

Ainsi $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}[X]$, $\mathrm{M}_2(\mathbb{R}), E_2, E_3$, munis de ces 2 opérations, sont des espaces vectoriels :

Ce sont nos espaces vectoriels de référence.

Leurs éléments sont appelés aussi vecteurs :

Maintenant : $(2, \sqrt{5}), (-7, \sqrt{3}), (2, -\frac{2}{7}), (x, y)$...sont des *vecteurs* de $\mathbb{R}^2$;
$(2, 0, \sqrt{5}), (1, -7, \sqrt{3}), (3, 2, -\frac{2}{7}), (x, y, z))$...sont des *vecteurs* de $\mathbb{R}^3$;
$X^2 - 4X + \sqrt{5}; aX^2 + bX + c$...sont des *vecteurs* de $\mathbb{R}[X]$, plus précisément, de $\mathbb{R}_2[X]$...

5 Objectifs, avertissement

Dans le paragraphe suivant, on va décrire les vecteurs d'un espace vectoriel en utilisant un minimum de vecteurs, généralisant ainsi la notion de repère pour un espace affine.

L'idée est la suivante : dans le plan E_2, on peut décrire précisément tout vecteur $\overrightarrow{u}$ dès que l'on a défini une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$:

Il existe un unique couple (x, y) tel que

$$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$$

Commenons par les espaces connus $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Remarque 5.1 *Pour certaines mentons de licence, seul le paragraphe ci dessous concernant les espaces $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont importants ; on pourra donc éventuellement n'étudier que les parties concernant $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ et ensuite directement passer aux matrices et systèmes...*

6 Droite vectorielle et plan vectoriel de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

En géométrie vectorielle, les ensembles sont constitués de vecteurs, alors qu'en géométrie affine, ils sont constitués de points ; on peut décrire une droite affine ou un plan affine par :

- Une (ou plusieurs) équation) cartésienne
–Une représentation paramétrée

Définition 6.1 *Dans $\mathbb{R}^3$, tout triplet de vecteurs non coplanaires $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base ; CNS : Det$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ non nul.*

Comment représenter un plan vectoriel ? une droite vectorielle ?

Une droite vectorielle D est l'ensemble des vecteurs colinéaires à un vecteur non nul de D :

Tout vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ de D est un vecteur directeur de D ;

Définition 6.2 *On dit aussi que $\overrightarrow{u}$ non nul de D est une base de D :*

Soit $D = \{t\overrightarrow{u}; t \in \mathbb{R}\}$

6.1 Représentation paramétrée

On notera $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$:
$D = \{(x, y, z), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}$, tel que : $x = ta$, $y = tb$, $z = tc$ $\}$:

Un plan vectoriel P est l'ensemble des vecteurs :

$P = \{s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}; s, t \in \mathbb{R}\}$

RP (représentation paramétrée) : On notera $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$: et $\overrightarrow{v} = (e, f, g)$:

$P = \{(x, y, z), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}$, tel que : $x = sa + te$, $y = sb + tf$, $z = sc + tg$ $\}$:

Définition 6.3 *Tout couple de vecteurs non colinéaires d'un plan vectoriel P est une base de P.*

Exemple 6.1 *Dans* $E = \mathbb{R}^3$, *soit* $P = \{(s, t, 3s + t), s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}$ *: P est le plan de base* $u = (1, 0, 3)$ *et* $v = (0, 1, 1)$

6.2 Equations cartésiennes

Un plan vectoriel a pour équation cartésienne (EC)
$P = \{(x, y, z), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}$, tel que : $ax + by + cz = 0$ $\}$
Interprétation : $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$ est un vecteur normal à P.

Une droite vectorielle est l'intersection de 2 plans ; elle a pour équation cartésienne : $D = \{(x, y, z), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}$, tel que : $ax + by + cz = 0$ et $ex + fy + gz = 0\}$:

On peut obtenir une RP de la droite en résolvant le système : deux inconnues en fonction de la troisième...

Exemple 6.2 *Dans* $\mathbb{R}^3$
Déterminer une EC du plan P :

$x = 2s - t$, $y = t$, $z = s + t$

La droite D : $x = u$, $y = 2u$, $z = -u$ *est elle incluse dans P ?*
D est-elle orthogonale P ?

Dans $\mathbb{R}^3$

Une EC du plan P :
$x = 2s - t$, $y = t$, $z = s + t$

peut s'obtenir en cherchant un vecteur normal l'aide du produit vectoriel de
$\overrightarrow{v} = (2, 0, 1) ett \overrightarrow{w} = (-1, 1, 1)$ vecteurs directeurs de P.

On obtient une EC de P :
$-x-3y+2z=0$
La droite D : $x=u$, $y=2u$, $z=-u$
est elle incluse dans P si $-u-3(2u)+2(-u)=0$:

non, D n'est pas incluse dans P ; autres méthodes possibles par les vecteurs directeurs...

D est-elle orthogonale P ? Non : Il suffit de remarquer que le vecteur $(1,2,-1)$, vecteur directeur de D n'est pas colinéaire un vecteur normal P, soit le vecteur $(-1,-3,2)$.

6.3 Intersections dans $\mathbb{R}^3$

On peut intuitivement se représenter une droite vectorielle par un immense bouquet de fleurs dont les tiges sont parallèles et de longueur variables. On peut intuitivement se représenter un plan vectoriel par un immense millefeuille !

Exemple 6.3 *Dans* $\mathbb{R}^3$,*muni d'une base* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *soit* $\overrightarrow{u}$ *de composantes* $(1,1,3)$: $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$

Soit $F = \{x\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j} + 3x\overrightarrow{k}; x \in \mathbb{R}\}$=$\{x\overrightarrow{u}, x \in \mathbb{R}\}$: F est le *sous espace vectoriel engendré* par le vecteur $\overrightarrow{u}$. C'est une droite vectorielle, $dimF = 1$

Exemple 6.4 *Dans* $E = \mathbb{R}^3$, *soit* $F = \{(x,y,3x+y), x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$ *: F est le* sous espace vectoriel engendré *par* $v = (1,0,3)$ *et* $w = (0,1,1)$: *C'est un plan vectoriel,* $dimF = 2$

Exemple 6.5 *Dans* $E = \mathbb{R}^3$, *soit* $F = \{(x,y,z), x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R},$ *tel que :* $x+y=0$ *et* $x-3y+z=0\}$ *:*

En résolvant le système $x+y=0$ et $x-3y+z=0$, on obtient $y=-x$ et $z=-4x$: donc F est le *sous espace vectoriel engendré* par le vecteur $u = (1,-1,-4)$. C'est une droite vectorielle, $dimF = 1$
C'est l'intersection de deux plans...Généralisons...
Quelle est l'intersection de F et de G dans les cas suivants ?

Exemple 6.6 *Soit* $\overrightarrow{a} = (5,1,3)$, $\overrightarrow{b} = (1,3,1)$ *et* $\overrightarrow{c} = (2,-1,1)$
Soit $D = Vect(\overrightarrow{a})$ *:*
Cela veut dire que $\overrightarrow{a}$ *est un vecteur directeur de D*

P= $Vect(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$
Cela veut dire que $(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ *sont des vecteurs directeurs de P*
D=$\{x\overrightarrow{a}, x \in \mathbb{R}\}$
D est le sous espace vectoriel engendré *par le vecteur* $\overrightarrow{a}$.
$D = \{(5x, x, 3x), x \in \mathbb{R}\}$
C' est la droite vectorielle, de base $\overrightarrow{a}$ *;* $dimD = 1$

P=$\{y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c}, y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\}$

P est le sous espace vectoriel engendré *par* $\overrightarrow{b} = (1,3,1)$ *et* $\overrightarrow{c} = (2,-1,1)$

C'est le plan vectoriel, de base $\overrightarrow{b} = (1,3,1)$ *et* $\overrightarrow{c} = (2,-1,1)$
$P = \{(y+2z, 3y-z, y+z), y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\}$ *:*
$dimP = 2$

L'intersection d'une droite et d'un plan est :
Soit la droite si celle ci est incluse dans le plan ;
Soit le vecteur nul, seul commun à tous les sous espaces.

On peut procéder de diverses manières :
- Voir si les vecteurs $\overrightarrow{a} = (5,1,3)$, $\overrightarrow{b} = (1,3,1)$ *et* $\overrightarrow{c} = (2,-1,1)$ *sont ou non coplanaires ; on peut calculer le déterminant de ces vecteurs ; il est nul. On peut aussi remarquer que* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{c}$ *Donc l'intersection de D et de P est la droite D*

Exemple 6.7 *Dans* $E = \mathbb{R}^3$, *soit* $F = \{(x, y, 3x+y), x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$ *: F est le* sous espace vectoriel engendré *par* $v = (1,0,3)$ *et* $w = (0,1,1)$ *: C'est un plan vectoriel,* $dimF = 2$ *Quelle est l'intersection de F et de G ?*

Exemple 6.8 *Dans* $E = \mathbb{R}^3$, *soit* $F = \{(x,y,z), x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R},$ *tel que :* $x+y-3z = 0\}$ *;*
Soit G= Vect($\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$*), avec :* $\overrightarrow{a} = (1,-1,0)$, $\overrightarrow{b} = (1,0,-1)$
L'intersection de 2 plans est :
Une droite vectorielle, sauf si ces plans sont confondus Or : On peut remarquer que $\overrightarrow{a}$ *appartient à F mais que* $\overrightarrow{b}$ *n'appartient pas à F Donc l'intersection des 2 plans F et G est la droite vectorielle de base* $\overrightarrow{a}$.

Comment généraliser cela à un espace vectoriel E?

7 Combinaison linéaire ; Bases...

Essayons avec les espaces vectoriels de référence :

1. $E = \mathbb{R}^2$: tout couple $(a,b) = a(1,0) + b(0,1)$: la famille $((1,0);(0,1))$ joue un rôle analogue à celui joué par $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
2. $E = M_2(\mathbb{R})$: toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aU_1 + bU_2 + cU_3 + dU_4$: la famille (U_1, U_2, U_3, U_4) joue un rôle analogue à celui joué par $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
3. $E = \mathbb{R}_2[X]$: tout polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ s'écrit : $P(X) = aX^2 + bX + c$: la famille $(1, X, X^2)$ joue un rôle analogue à celui joué par $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$...
4. $E = \mathbb{R}[X]$: il semble impossible de trouver une telle famille dans ce cas...

Donnons les définitions qui semble découler de ces exemples :

Définition 7.1 *Pour toute famille de vecteurs* $(U_1, U_2, U_3, ...U_p)$ *on appelle* ***combinaison linéaire*** *des vecteurs de cette famille tout vecteur V de E qui s'écrit*

$$V = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i U_i$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ...\lambda_p$ étant des scalaires quelconques.

Définition 7.2 *Une famille de vecteurs* $(U_1, U_2, U_3, ...U_p)$ *est appelée* ***famille génératrice*** *de E si tout vecteur de E peut s'écrire comme une COMBINAISON LINEAIRE des vecteurs de cette famille :*

C'est à dire si, pour tout vecteur V de E, il esiste des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ...\lambda_p$ *tels que :*

$$V = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i U_i$$

Exemple 7.1 *Un plan vectoriel a comme famille génératrice tout couple de vecteurs non colinéaires.*

Exemple 7.2 *Une droite vectorielle a comme famille génératrice tout vecteur non nul.*

Exemple 7.3 *Les familles mises en évidence au dessus sont des familles génératrices de leurs espaces respectifs : la famille* $(1, X, X^2)$ *est génératrice de* $\mathbb{R}_2[X]$; *également, la famille* $(1, X, X^2, 1 + 6X + X^2)$:

$P(X) = aX^2 + bX + c = c.1 + b.X + c.X^2 + 0.(1 + 6X + X^2)...$

Définition 7.3 *Un* sous ensemble F non vide d'un espace vectoriel E en est un sous espace vectoriel si pour tous vecteurs u et v de F et tous scalaires α, β, $\alpha u + \beta v$ *appartient à F.*

Remarque 7.1 *Il est équivalent de dire :* pour tous vecteurs u et v de F et tout scalaire α, $u + v$ *et* αu *appartiennent à F.*

Pour une famille de vecteurs qui n'est pas génératrice de l'espace vectoriel E, on peut définir maintenant une notion liée aux familles génératrices : celle de *sous espace vectoriel engendré* par cette famille de vecteurs :

Définition 7.4 *(Et proposition) Toute famille de vecteurs* $(U_1, U_2, U_3, ...U_m)$ *de E engendre un espace vectoriel F contenu dans E : l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des éléments de la famille.*

Preuve 7.1 *Facile : la somme de combinaisons linéaires des éléments de la famille est une combinaison linéaire des éléments de la famille.*

Exemple 7.4 *Dans* $E = \mathbb{R}^2$,*soit* $u = (1,1)$ *:* $F = \{x(1,1), x \in \mathbb{R}\}$=$\{(x,x), x \in \mathbb{R}\}$ *: F est le* sous-espace vectoriel engendré *par le vecteur u.*

Exemple 7.5 *Dans* $E = \mathbb{R}_2[X]$: $F = \{P(X) = aX + b,\ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ *F est le* sous-espace vectoriel engendré *par les vecteurs* $(1, X)$*. C'est* $\mathbb{R}_1[X]$

Exemple 7.6 $\mathbb{R}_2[X]$ *est un* sous-espace vectoriel *de* $\mathbb{R}[X]$;*c'est le* sous-espace vectoriel engendré *par les vecteurs* $(1, X, X^2)$.

Remarque 7.2 *Tout* sous espace vectoriel d'un espace vectoriel E en est un sous ensemble et contient au moins l'élément neutre de E. Il possède aussi la structure d'espace vectoriel. On donne alors une caractérisation plus générale (en dimension finie ou pas) d'un sous espace vectoriel F d'un espace vectoriel E :

Avançons dans la recherche de décrire avec le minimum d'informations un espace vectoriel donné...

Il est facile de remarquer que l'on a la proposition :

Proposition 7.1 *Si une famille de vecteurs* $(U_1, U_2, U_3, ...U_p)$ *est famille génératrice de E, alors toute "sur famille" c'est à dire toute famille contenant la précédente est aussi génératrice :*

On voit donc que l'objectif est pour un espace vectoriel donné, de trouver si possible des familles génératrices les plus "petites" possible...

D'où la

Définition 7.5 *On appelle base d'un espace vectoriel E, toute famille génératrice B minimale*

Cela veut dire que toute sous famille de B est non génératrice.

Exemple 7.7 $(1, X, X^2)$ *est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$

Exemple 7.8 *E est l'ensemble des vecteurs du plan au sens géométrique, muni d'une base* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *donnée : cette base au sens "classique" est encore une base avec notre définition...heureusement !*

Proposition 7.2 *Une famille de vecteurs* $(U_1, U_2, U_3, \ldots U_n)$ *est une base de E si et seulement si tout vecteur* U *de E se décompose de façon unique sur cette base*

Cela veut dire que tout vecteur U est une combinaison linéaire des vecteurs de la base, et ce de manière unique.

On retrouve le vocabulaire emprunté à la géométrie vectorielle.

Preuve 7.2 *Si $(U_1, U_2, U_3, \ldots U_n)$ est une base de E :*

L'existence d'une décomposition pour un vecteur quelconque découle de la définition même de famille génératrice ; il reste à montrer que si, de plus, la famille génératrice est minimale-une base-alors la décomposition est unique :

Supposons donc, par l'absurde, qu'un vecteur U admette sur cette base deux décompositions :

Alors : $U = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i U_i$; posons alors $x_i = \lambda_i - \lambda'_i$:

On a $0_E = \sum_{i=1}^{n} x_i U_i$, et au moins un des x_i est non nul : posons x_I un de ces réels non nuls :

Puisque $x_I U_I = \sum_{i=1 i \neq I}^{n} x_i U_i$, il est facile de remarquer qu'alors la sous famille $(U_1, U_2, U_3, \ldots U_n) \backslash U_I$ est génératrice, ce qui contredit le caractère minimal de la base.

Réciproquement, le caractère minimal découle de l'unicité de la décomposition de O_E

Certaines bases jouent des rôles particuliers, sont plus utiles que d'autres, elles sont alors bases de référence : on les appelle bases canoniques *:*

Base canonique de :

$\mathbb{R}^2 : ((1,0),(0,1))$; *de* $\mathbb{R}^3 : ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$;

de $\mathbb{R}_2[X] : (1, X, X^2)$, *de* $M_2(\mathbb{R}) : (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$...

La preuve de la proposition précédente a mis en évidence la notion de *famille libre, liée :* donnons la

Définition 7.6 *Une famille de vecteurs $(U_1, U_2, U_3, \ldots U_p)$ est une* famille liée *de E si l'un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres. Dans le cas contraire, on dit que la famille est libre :*

Ainsi :

Définition 7.7 *Une famille de vecteurs $(U_1, U_2, U_3, \ldots U_p)$ est une* famille libre *de E si le vecteur nul de E se décompose de façon unique sur cette famille.*

Famille libre : cela veut dire que si : $0_E = \sum_{i=1}^{p} x_i U_i$, alors tous les x_i sont nuls.

Il n'est pas difficile de montrer que l'on a la

Proposition 7.3 *Une famille de vecteurs $(U_1, U_2, U_3, \ldots U_n)$ est une base de E si et seulement si cette famille est génératrice et libre.*

On admet que toutes les bases d'un espace vectoriel, s'il en existe, comportent le même nombre n de vecteurs ; ce nombre n est alors appelé la dimension de l'espace vectoriel ; certains espaces vectoriels n'ont pas de base : on dit qu'ils sont de dimension infinie.

Exemple 7.9 *Dim* $\mathbb{R}^3 = 3$; *Dim* $\mathbb{R}^n = n$; *Dim* $\mathbb{R}_2[X] = 3$; *Dim* $M_2(\mathbb{R}) = 4$...

Exemple 7.10 $\mathbb{R}[X]$ *est de dimension infinie.*

8 En pratique...

Enfin on a les propositions importantes en pratique :

Proposition 8.1 *Si F est un* sous espace vectoriel d'un espace E de dimension finie, alors dimF$\leq \dim E$;*si* $dimF = dimE$, *alors* $E = F$.

Proposition 8.2 *Dans un* espace E de dimension finie n, toute famille génératrice comportant n vecteurs est une base de E, toute famille libre comportant n vecteurs est une base de E.

Exemple 8.1 *Considérons dans* $\mathbb{R}^3$ *les vecteurs u=(0,1,1) ; v=(1,0,1),w=(0,0,1) :*

Pour montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$,
on montre que la famille est libre :
Si $\alpha u + \beta v + \gamma w = (0,0,0)$ alors on a en identifiant après développement : $\beta = 0; \alpha = 0; \alpha + \beta + \gamma = 0$:
Donc c'est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$: c'est une base.
Tout vecteur a donc une unique décomposition sur la base canonique et une unique décomposition sur la base (u,v,w) :
Par exemple, les coordonnées de $U = (2, 3, -1)$ la base canonique : ce sont : 2,3,-1 ;
Dans la base (u,v,w), on écrit : $U = \alpha u + \beta v + \gamma w = (\beta; \alpha; \alpha + \beta + \gamma) = (2, 3, -1)$ et on trouve facilement α, β, γ.
$\beta = 2; \alpha = 3; \gamma = -6$:
Les coordonnées de U dans la base (u,v,w) sont : 3,2,-6
Vérification :
$U = (2, 3, -1) =$ 2(1,0,0)+3(0,1,0)-1(0,0,1)
$U = (2, 3, -1) =$ 3(0,1,1)+2(1,0,1)-6(0,0,1)

En pratique, on utilise souvent la notion de déterminant ; voir paragraphe ci-dessous pour rappels.

Proposition 8.3 *Un système de 3 vecteurs de E de dimension 3 est une base de E si et seulement si le déterminant de ce système est non nul.*

Exemple 8.2 *Les vecteurs* $u = (1, 1, 0), v = (1, 1, 1), w = (1, 0, 0)$ *forment une base de* $\mathbb{R}^3$:

On a facilement $DetM = 1$, donc (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$

Exemple 8.3 *Considérons dans* $\mathbb{R}^3$ *les vecteurs u=(0,1,1) ; v=(1,0,1),w=(0,0,1) :*

Pour montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$,
le plus simple est de montrer que le déterminant est non nul ; or ce déterminant vaut -1...
Règle pratique pour le calcul de déterminants d'ordre 3 : règle de Sarrus :
On peut remarquer que :

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a(ei - fh) - d(bi - ch) + g(bf - ec) = aei + bfg + cdh - (ceg + bdi + afh)$:

On peut formellement adjoindre deux colonnes supplémentaires, les deux premières et faire apparaître des "diagonales"...

$\left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right.$

Des rappels ?

9 Rappels sur les déterminants

On généralise à présent les résultats vus en dimension 2 : L'outil déterminant sera le plus simple pour caractériser des bases...

Dans un espace E orienté par une base orthonormée directe B, on appelle

Définition 9.1 *Déterminant (ou produit mixte) de* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ *dans la base* $\mathcal{B}$ *le scalaire*

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in E^3, \quad \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \langle \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{w} \rangle .$$

On a aussi : $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \langle \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} \mid \overrightarrow{u} \rangle$

On a en particulier :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{3} \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, e_i)\, e_i$$

Proposition 9.1 *Pour toute base orthonormée directe :*

$$Det\,(e_1, e_2, e_3) = 1$$

pour toute base orthonormée (e'_1, e'_2, e'_3) indirecte : $\text{Det}(e'_1, e'_2, e'_3) = -1;$

On peut alors montrer que :

Si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ sont des vecteurs de E^3, leurs composantes (a,d, g), (b,e, h), (c, f, i) étant mises en colonnes dans une matrice M, le déterminant $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est donné par la formule ci-dessous :

$$Det($$

$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}))$
=a(ei-fh)-d(bi-ch)+g(bf-ec)

9.1 Pour bien comprendre...

Il y a une difficulté en algèbre linéaire : les ensembles dans lesquels on travaille sont divers et variés ; il importe avant toute chose de bien se repérer, savoir faire la distinction entre vecteurs et coordonnées etc ; un tableau pour faire le point :

Quels sont les vecteurs d'un espace donné ?

Quels sont les vecteurs de $\mathbb{R}^3$?
Ce sont les triplets (x,y,z)
Quels sont les vecteurs de $\mathbb{R}[X]$?
Ce sont les polynômes
Quels sont les vecteurs de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$?
Ce sont les matrices carrées d'ordre 2

Récapitulons :

Espace E :	$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}_2[X]$
Vecteur u de E :	$u = (x, y, z)$	$u = aX^2 + bX + c$
Base canonique B :	$B = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$	$B = (1, X, X^2)$
Coordonnées de u dans B :	(x, y, z)	(c, b, a)

Remarque 9.1 *Les choses sont plus simples dans* $\mathbb{R}^n$ *que dans un autre espace de dimension* n *:*

Dans les vecteurs sont confondus avec leurs n-uplet de coordonnées : voir dans ce tableau les lignes 2 et 4...

Comment caractériser une base ?

Une famille de vecteurs (U_1,U_2,U_3,...U_n) est une base de E si et seulement si tout vecteur U de E se décompose de façon unique sur cette base.

Une famille de vecteurs (U_1,U_2,U_3,...U_n) est une base de E si et seulement si c'est une famille libre est génératrice.

Dans un *espace E de dimension finie n, toute famille libre comportant n vecteurs est une base de E.*

Dans un *espace E de dimension finie n, toute famille génératrice comportant n vecteurs est une base de E : c'est une famille génératrice minimale.*

Et surtout le plus simple :
Un système de 3 vecteurs de E de dimension 3 est une base de E si et seulement si ils sont

non coplanaires si et seulement si le déterminant est non nul.

10 Matrices

Il est maintenant naturel de poser la

Définition 10.1 *On appelle matrice n colonnes, p lignes tout tableau ayant p colonnes et n lignes, dont les éléments sont des réels quelconques.*

Exemple 10.1 $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -7 & 0 \\ 0.5 & \sqrt{2} & 4 & -6 \\ -5 & 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$...

Interprétons :

Donnons nous cette fois 2 espaces vectoriels E et F, munis chacun d'une base ; notons $dimE = p$, $dimF = n$:

Toute matrice M associe un vecteur de E exprimé dans la base de E donnée un vecteur de F exprimé dans la base de F donnée : On peut interpréter toute matrice comme celle d'une application f, appelée application linaire, transformant un vecteur u de E en un vecteur u'=f(u) de F :

Précisément, on a le

Théorème 10.1 *Soient des espaces vectoriels E et F, munis chacun d'une base ; notons* $dimE = p$, $dimF = n$:

Base de E : $(b_j)_{,j \leq p}$;Base de F : $(\beta_i)_{,i \leq n}$ Toute matrice M associe un vecteur de E exprimé dans la base de E donnée un vecteur de F exprimé dans la base de F donnée : Une matrice M donnée permet de définir avec la relation MU=U' une unique application f, et cette application est linéaire, c'est dire vérifie la définition :

Définition 10.2 *Soient des espaces vectoriels E et F ; une application f de E dans F est linaire si pour tout vecteur u de E, pour tout vecteur v de E, pour tout réel* λ :
$f(u + \lambda v)) = f(u) + \lambda f(v)$

Preuve 10.1 *Il est facile de vérifier que pour tout réel* λ :
$M(U + \lambda V)) = MU + \lambda MV$

Et donc :

Pour tout vecteur u de E, pour tout vecteur v de E, pour tout réel λ :
$f(u + \lambda v)) = f(u) + \lambda f(v)$

Il faut retenir la proposition suivante :

Proposition 10.1 *Toute matrice M* $(a_{ij})_{i \leq n, j \leq p}$ *définit une* ***unique application linéaire*** *f telle que les images par f des vecteurs de la base de E ont pour coordonnées dans la base de F les colonnes de M :*

$$f(b_j) =_{i=1}^{n} a_{ij}\beta_i$$

Et inversement, étant donnés p vecteurs quelconques de F :$(b'_j)_{,j \leq p}$,*il existe une et une seule application linéaire f telle que* $f(b_j) = b'_j$

Ainsi,

une application linéaire est caractérisée par les images des vecteurs d'une base donnée

Preuve 10.2 *Vérification facile : Pour ne pas trop compliquer, prenons d'abord des exemples où* $E = F$ *:*

Exemple 10.2 $E = F = \mathbb{R}^3$ *muni de sa base canonique ; on donne* $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$:

Alors tout vecteur $u = (x, y, z)$ *est transformé par* f*, application linéaire associée, en* $u' = (x', y', z')$ *tel que* $U\prime = MU$ *avec* $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $U' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ *selon le même principe de calcul :* $x\prime = x + 2y + 3z$*,* $y\prime = -6x + 3y + 2z$*,* $z\prime = y + 5z$*.*

Alors on voit facilement que les colonnes de la matrice donnent les images des vecteurs de la base :

$f((1, 0, 0)) = (1, -6, 0)$*,* $f((0, 1, 0)) = (2, 3, 1)$*,* $f((0, 0, 1)) = (3, 2, 5)$*.*

Définition 10.3 *On dit que les expressions donnant les coordonnées de l'image d'un vecteur en fonction de celles de ce vecteur sont, relativement aux bases considérées, les formules analytiques de l'application linéaire.*

Remarque 10.1 *Attention : la matrice d'une application linéaire est une représentation de celle-ci dans des bases données de* E*, ensemble de départ, et* F *ensemble d'arrivée ; si on change l'une des bases, la matrice change mais pas l'application linéaire...*

Exemple 10.3 *Soit* f *l'application de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *qui à tout vecteur* u *associe* $u\prime = 2u$:

Dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$*, la matrice de* f *est :* $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; *dans une autre base, ce sera une autre matrice, on le verra plus loin...*

Exemple 10.4 *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$*,* $f(a, b, c) = (2a + b - 5c, 3a - 2b + c)$: *La matrice de* f *dans les bases canoniques de* $\mathbb{R}^3$ *et* $\mathbb{R}^2$ *est :*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 10.2 *On peut pour obtenir cette matrice* :

−Soit chercher les images des vecteurs de la base de E *donnée;*
−Soit écrire $f(a, b, c) = a(2, 3) + b(1, -2) + c(-5, 1)$*.*
Attention, il y a ici deux espaces différents et deux bases !

Exemple 10.5 *Ecrire la matrice de l'application linéaire g de $\mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $(1, X, X^2)$, dans $\mathbb{R}_1[X]$ muni de sa base canonique $(1, X)$, telle que :*

$g(1) = 2 + 3X$;
$g(X) = 1 - 2X$;
$g(X^2) = -5 + X$; :
La matrice de g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}_1[X]$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est la même matrice que dans l'exemple précédent :
La seule donnée de la matrice ne permet pas de savoir dans quels espaces on travaille !

Exemple 10.6 *Ecrire la matrice de l'application linéaire f de $\mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $(1, X, X^2)$, dans $\mathbb{R}_1[X]$ muni de sa base canonique $(1, X)$, qui à un polynôme quelconque P associe la dérivée P' :*

D'abord, vérifions ce qui est affirmé dans l'énoncé : pour tout polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$, on a $P\prime(X) = 2aX + b$: P' appartient bien à $\mathbb{R}_1[X]$; ensuite la linéarité de la dérivation (justement !) nous permet de dire :
$(\alpha P + \beta Q)' = \alpha P' + \beta Q'$: soit, $f(\alpha P + \beta Q) = \alpha f(P) + \beta f(Q)$: f est bien linéaire.
Reste à chercher les images par f des vecteurs de la base $(1, X, X^2)$:
$f(1) = 0$, en fait, le polynôme nul ; $f(X) = 1$, $f(X^2) = 2X$:
La matrice M est relativement aux bases $(1, X, X^2)$ et $(1, X)$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarque 10.3 Remarquons donc que la seule donnée des images des vecteurs d'une base suffit à "interpoller", à définir une unique application **linéaire** f, c'est à dire à définir parfaitement $f(\overrightarrow{u})$, pour tout vecteur u ; comparons avec ce qui ce passe pour une application numérique f...

La donnée de n points $M_i(x_i, y_i)$ du plan ne permet pas de définir une unique courbe qui passe par ces n points, et en général il n'existe pas de fonction linéaire f telle que $f(x_i) = y_i$, pour tout $i \leq n$; sauf si ces points sont alignés.
Le théorème est-il en défaut ?
Non : pour $E = F = \mathbb{R}$
On est en dimension 1, la donnée d'un point A(a ;b) permet bien de définir une unique fonction linéaire, celle dont le graphe est la droite (AB)

11 Notion de rang

Cette notion est centrale dans ce cours : elle permet de comprendre comment les diverses notions s'articulent entre elles...

Elle permet de répondre à la question suivante :

Dans un système de plusieurs équations à plusieurs inconnues, combien d'équations sont réellement nécessaires ?

De combien d'équations ai-je besoin pour résoudre le problème ?

En effet, si une des équations est liée aux autres (par exemple, la numéro 2 est la somme de la numéro 1 et de la numéro 3, la numéro 2 est superflue ; elle ne m'apporte aucun renseignement nouveau...

Ce problème aura une traduction matricielle : examinons le sous cet aspect :

Prenons donc une matrice de n colonnes et p lignes ; les n colonnes définissent n vecteurs de $\mathbb{R}^p$*;posons la*

Définition 11.1 *On appelle rang d'une matrice de taille (p lignes, n colonnes) le nombre maximum de vecteurs colonnes libres.*

Proposition 11.1 *Le rang d'une matrice est la dimension du sous espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes...*

Exemple 11.1 *La matrice* $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ *est de rang 2 ; la matrice* $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$ *est de rang 1 ;*

Exemple 11.2 *La matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 7 & 2 & 72 \\ 3 & 4 & 34 \end{pmatrix}$ *est de rang 2 ; la matrice* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *est de rang 3 ; la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & -1 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ *est de rang 2...*

Preuve 11.1 *Facile (on met en évidence des relations entre les colonnes) sauf le dernier cas : montrons que les vecteurs colonnes* $u = (0,0,1)$, $v = (0,1,1)$, $w = (1,1,1)$ *sont libres, c'est à dire :*

Pour tous réels x, y, z, *si* $xu + yv + zw = (0,0,0)$ *alors* $x = y = z = 0$ *: on obtient :* $z = 0$, $y + z = 0$, $x + y + z = 0$, *ce qui conduit facilement à la conclusion.*

Le calcul du rang se fera bientôt par méthode systématique... : on commence par trouver la valeur maximum et on "descend"...

A l'aide de ce qui précède, on pose naturellement la

Définition 11.2 *On appelle rang d'une famille de n vecteurs le nombre maximum de vecteurs libres.*

On peut aussi remarquer que le rang d'une famille de n vecteurs est la dimension du sous espace vectoriel engendré par ces vecteurs...

Remarque 11.1 *Ainsi, le rang d'une famille de n vecteurs est au plus égal à n...*

12 Calcul matriciel

Dans ce chapitre, l'ensemble des matrices n lignes, p colonnes est noté Mn,p($\mathbb{R}$)
Nous allons voir que les opérations sur les matrices vues au chapitre I se généralisent sans difficulté.

Cadre de travail :

Soient des espaces vectoriels E et F, munis chacun d'une base ; notons $dimE = p$, $dimF = n$:
Base de E : $(b_j)_{,j\leq p}$;*Base de F :* $(\beta_i)_{,i\leq n}$

12.1 Opérations sur les matrices

12.1.1 L'addition :

Toute matrice M=$(a_{ij})_{i\leq n,j\leq p}$ *définit une unique application linéaire f telle que les images par f des vecteurs de la base de E ont pour coordonnées dans la base de F les colonnes de M :*

$$f(b_j) =_{i=1}^{n} a_{ij}\beta_i$$

Soit une matrice N= $(a'_{ij})_{i\leq n,j\leq p}$ *définit une unique application linéaire g telle que les images par g des vecteurs de la base de E ont pour coordonnées dans la base de F les colonnes de M :*

$$g(b_j) =_{i=1}^{n} a'_{ij}\beta_i$$

Proposition 12.1 *Dans les conditions précédentes, f+g est une application linéaire*

Preuve 12.1 *Facile*

Définition 12.1 *Par définition, M+N est la matrice de f+g ; c'est* $((a_{ij} + a'_{ij})_{i\leq n,j\leq p}$

12.1.2 La multiplication par un scalaire :

Pour tout scalaire k,

Proposition 12.2 *Dans les conditions précédentes, kf est une application linéaire, et par définition, kM est la matrice de kf ; c'est* $((ka_{ij})_{i\leq n,j\leq p}$

12.1.3 La multiplication de deux matrices :

Il nous faut ici composer des applications linéaires :
Soient des espaces vectoriels E, F, G munis chacun d'une base ; notons $dimE = p$, $dimF = m, dimG = n$
Soit M une matrice, M=$(a_{jk})_{j\leq m,k\leq p}$ *définit une unique application linéaire f de E dans F*
La matrice M comporte m lignes et p colonnes
Soit N une matrice, N=$(b_{ij})_{i\leq n,j\leq m}$ *définit une unique application linéaire g de F dans G*
La matrice N comporte n lignes et m colonnes

Proposition 12.3 *Dans ces conditions, la composée $g \circ f : E \to G$ est une application linéaire de E dans G, et par définition, NM est sa matrice dans les bases données de E et G*

La matrice NM comporte n lignes et p colonnes
Ainsi :

$$N \text{ est une } matrice(n,m), M \text{ est une } matrice(m,p), NM \text{ est une } matrice(n,p)$$

Preuve 12.2 *Facile*

Remarque 12.1 *Le produit matriciel AB est possible si le nombre de colonnes de A est le même que celui de lignes de B*

Exemple 12.1 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

12.1.4 L'inverse d'une matrice carrée

Définition 12.2 *Une matrice carrée M est inversible si il existe une matrice notée M^{-1} telle que $MM^{-1} = I$*

On a facilement :
Soient des espaces vectoriels E et F, munis chacun d'une base ; notons $dimE = dimF = n$:
Si f est un isomorphisme, alors la matrice M^{-1}de f^{-1} vérifie $MM^{-1} = I$
Méthodes pour trouver M^{-1}, si elle existe :
On détaillera ce point plus loin, indiquons que l'on peut travailler sur les formules analytiques et les inverser si possible...

Exemple 12.2 *M*$=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

On a facilement : $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *E étant un espace vectoriel de dimension 3, muni d'une base, on a la*

Définition 12.3 *On appelle déterminant de ma matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ le réel, noté*

DetM$=\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \langle \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} \mid \overrightarrow{u} \rangle$

$$DetM = a(ei - fh) - d(bi - ch) + g(bf - ec)$$

Remarque 12.2 *La définition de déterminant de matrice permet d'étendre celle de déterminant de vecteurs dans tout espace de dimension 3.*

Remarquons que l'on peut mettre en évidence des déterminants d'ordre 2 :
En effet, $ei - fh = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$*, et ainsi, on a une autre écriture du déterminant :*
$DetM = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a(\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}) - d(\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}) + g(\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix})$:
Il apparaît que la première colonne joue un rôle particulier ; on dit que les déterminants $\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$ *sont les* mineurs *associés respectivement à : a, d, g.*

Exemple 12.3 *Le déterminant de la matrice identité vaut 1.*

Définition 12.4 *On appelle déterminant d'un système de 3 vecteurs le déterminant de la matrice formée par les vecteurs colonnes.*

Proposition 12.4 *En pratique, on a le résultat suivant : le déterminant d'un produit de matrices MN est le produit des déterminants :*

$$Det(MN) = DetM.DetN$$

Proposition 12.5 *Une matrice carrée d'ordre 3 est de rang 3, c'est à dire inversible, si son déterminant est non nul.*

Preuve 12.3 *Si M est inversible, alors* $MM^{-1} = I$*,donc* $Det(MM^{-1}) = 1 = (DetM).Det(M^{-1})$:*donc* $DetM \neq 0$;*de plus,*

$$Det(M^{-1}) = (DetM)^{-1}$$

Réciproquement, voici une idée de preuve : il faut montrer que le système $MX = X\prime$ *a, pour un vecteur X' donné une unique solution X, ce qui n'est pas trop difficile en dimension 3...*