UNIVERSITÉ DE PROVENCE L1PC-S2 2009-2010

Examen, mai 2010

Mathématiques pour PC 2 (énoncé et corrigé)

Exercice 1 (**9p**) Questions de cours :

1. Donner la définition des notions suivantes :
   (a) déterminant d'une matrice carrée de taille 2. 1p

Le déterminant de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *est* $ad - cb$.

   (b) matrice orthogonale. 1p

Les vecteurs-colonnes d'une matrice orthogonale sont orthogonaux deux à deux, c'est à dire leur produit scalaire est nul.

   (c) groupe et groupe abélien. 1p

G est un groupe pour la loi $*$ si
cette loi est associative ($a * (b * c) = (a * b) * c$ pour tout $a, b, c \in G$)
elle admet un élément neutre e ($a * e = e * a = a$ pour tout $a \in G$)
tout $a \in G$ admet un symétrique a' ($a * a' = a' * a = e$).
Ce groupe est abélien (ou commutatif) si, de plus, $a * b = b * a$ pour tout $a, b \in G$.

   (d) application différentiable et différentielle pour une application $f : U \to \mathbb{R}$, où $U \subset \mathbb{R}^2$ est un sous-ensemble ouvert. 1p

f est différentiable si, pour tout $(x_0, y_0) \in U$, il existe deux réels a et b tels que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - bk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

La différentielle de f au point (x_0, y_0) est l'application linéaire qui associe, à tout couple de réels (h, k), le réel $ah + bk$.

2. Définir le groupe $\mathfrak{S}(M)$ des permutations d'un ensemble M, et montrer que $\mathfrak{S}(3)$ est non-abélien. 2p

$\mathfrak{S}(M)$ est l'ensemble des bijections de M dans M.
$\mathfrak{S}(3)$ n'est pas abélien parce (par exemple) si on définit une permutation f par $f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 3$ et une permutation g par $g(1) = 1, g(2) = 3, g(3) = 2$, on a $f(g(1)) = 2$ et $g(f(1)) = 3$, ce qui fait que f et g ne commutent pas.

3. Définir le groupe $\mathbb{Z}_n$ et faire le tableau de la loi de composition de ce groupe pour $n = 3$. 2p

$\mathbb{Z}_n$ est l'ensemble des entiers modulo n, sa loi de composition est l'addition modulo n.
Table d'addition de $\mathbb{Z}_3$:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

4. Supposons que $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en $(x, y) \in U$. Comment s'écrit explicitement la différentielle $df(x, y)$ en utilisant les dérivées partielles de f en (x, y) ? *Indication : On rappelle que la différentielle $df(x, y)$ est une application linéaire* : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. 1p

$df(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f}{\partial y} dy.$

dx est l'application linéaire définie par $dx(h, k) = h$, et dy est l'application linéaire définie par $dy(h, k) = k$.

Exercice 2 (**10p**) Considérons les quatre points $a(1, 1)$, $b(-1, 1)$, $c(-1, -1)$, $d(1, -1)$ dans le plan $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que le quadrilatère $Q = abcd$ est un carré. 1p

Il faut vérifier que 4 côtés sont égaux et un angle est droit ; ou que 3 côtés sont égaux et 2 angles sont droits ; ou que 2 côtés sont égaux et 3 angles sont droits. Par exemple on vérifie que $\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{bc}, \overrightarrow{cd}, \overrightarrow{da}$ ont pour longueur 2, et que le produit scalaire $\overrightarrow{ab} \cdot \overrightarrow{ac}$ est nul.

2. Quelles sont les rotations du plan qui laissent Q invariant ? 1p

Les rotations d'angle multiple de $\frac{\pi}{2}$. *Il y en a quatre distinctes : les rotations d'angle* $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

3. Quelles sont les symétries axiales qui laissent Q invariant ? 1p

Les quatre symétries dont les axes sont les axes de coordonnées, ou leurs bissectrices.

4. Combien d'éléments a le groupe de symétrie G de Q ? 1p

8.

5. Décrire explicitement le sous-groupe G_0 de G formé par les isométries *directes* qui laissent Q invariant. 1p

Ce sont les quatre rotations.

6. Montrer que G_0 est abélien et est isomorphe à $\mathbb{Z}_4$. 1p

G_0 *est engendré par la rotation* R *d'angle* $\frac{\pi}{2}$, *puisque les éléments de* G_0 *sont* R^0, R^1, R^2, R^3. *Les* R^n *commutent.*
De même, $\mathbb{Z}_4$ *est engendré par* 1 *puisque ses éléments sont* $0 \cdot 1, 1 \cdot 1, 2 \cdot 1, 3 \cdot 1$
L'isomorphisme entre les groupes $\mathbb{Z}_4$ *et* G_0 *est la bijection* f *définie par* $f(n) = R^n$ *pour* $n = 0, 1, 2, 3$ *:*
on a $f(m+n) = R^{m+n} = R^m \circ R^n = f(m) \circ f(n)$.

7. Est-ce que G est abélien ? 1p

Non.

8. Soit $H \subset G$ le sous-ensemble formé par l'identité (désignée par id), les deux symétries σ_x, σ_y par rapport aux deux axes de coordonnées, et la rotation r_π d'angle π autour de l'origine (qui coïncide avec le symétrie de centre $0_{\mathbb{R}^2}$). Montrer que H est un sous-groupe de G et faire le tableau de la loi de composition sur H définie par la composition des isométries. 1p

Table de composition de H *:*

$\circ$	Id	σ_x	σ_y	r_π
Id	Id	σ_x	σ_y	r_π
σ_x	σ_x	Id	r_π	σ_y
σ_y	σ_y	r_π	Id	σ_x
r_π	r_π	σ_y	σ_x	Id

9. Justifier que H est abélien. 1p

La table de composition de H *est symétrique par rapport à sa diagonale principale.*

10. Montrer que H est isomorphe au produit $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. 1p

Table de composition de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ *:*

$+$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,0)$
$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$
$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(0,0)$

L'isomorphisme entre $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ *et* H *est la bijection* g *définie par* $g(0,0) = Id, g(0,1) = \sigma_x, g(1,0) = \sigma_y, g(1,1) = r_\pi$.
Ça revient à poser $g(m,n) = (\sigma_x)^n \circ (\sigma_y)^m$ *pour tout* m *et* n. *On a alors*

$$\begin{aligned} g\big((m,n)+(m',n')\big) &= (\sigma_x)^{n+n'} \circ (\sigma_y)^{m+m'} \\ &= (\sigma_x)^n \circ (\sigma_y)^m \circ (\sigma_x)^{n'} \circ (\sigma_y)^{m'} \quad \textit{(parce que ça commute)} \\ &= g(m,n) \circ g(m',n'). \end{aligned}$$

C'est à dire g *est un morphisme. C'est un isomorphisme parce que morphisme bijectif.*

Exercice 3 (**10p**) Résoudre les équations différentielles

1. $x^3 y' = e^y$ 2p

$y = -\ln\left(\dfrac{1}{2x^2} + C\right)$.

2. $(x^2+1)y' - xy = 0$ 2p

$y = C\sqrt{x^2+1}$.

3. $(x^2+1)y' - xy = 2x$ 2p

$y = -2 + C\sqrt{x^2+1}$.

4. $y'' + y' - 6y = 0$ avec les conditions initiales $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$. 2p

$y = \dfrac{e^3}{5}e^{-3x} + \dfrac{4}{5e^2}e^{2x}$.

5. $y'' + ky = 0$ (où $k > 0$) avec les conditions initiales $y(0) = y_0$, $y'(0) = v_0$. 2p

$y = y_0 \cos\left(x\sqrt{k}\right) + \dfrac{v_0}{\sqrt{k}} \sin\left(x\sqrt{k}\right)$.

Exercice 4 (**6p**) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq 0_{\mathbb{R}^2} \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = 0_{\mathbb{R}^2} \end{cases}$.

1. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *Indication : Traiter soigneusement le cas* $(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2}$ *en utilisant la définition des dérivées partielles.* 2p

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *est la dérivée de* $f(x,0)$ *; mais* $f(x,0)$ *est nul donc c'est* 0.
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ *est la dérivée de* $f(0,y)$ *; mais* $f(0,y)$ *est nul donc c'est* 0.
En tout autre point que $(0,0)$, f *admet des dérivées partielles en tant que composée de fonctions usuelles définies au voisinage de ce point.*

2. Déterminer explicitement $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en un point $(x,y) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$. 1p

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

3. Écrire la matrice jacobienne de f en $0_{\mathbb{R}^2}$. 1p

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. Montrer que f n'est pas différentiable en $0_{\mathbb{R}^2}$. 2p

$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - 0 \cdot h - 0 \cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}}$ *ne vaut pas* 0, *par exemple dans le cas* $h = k$ *ça vaut* 1.