

Examen, 22 juin 2010, énoncé et corrigé

Mathématiques pour PC 2

Exercice 1 (10p) Questions de cours :

1. Donner la définition des notions suivantes :

(a) isométrie plane, 1p

Réponse : C'est une application du plan dans lui-même qui conserve les longueurs.

(b) le produit scalaire standard sur \mathbb{R}^2 , 1pRéponse : Le produit scalaire de $V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ est $V \cdot W = x_1y_1 + x_2y_2$.(c) base orthonormale de \mathbb{R}^2 , 1pRéponse : C'est un couple de vecteurs V et W , orthogonaux entre eux et de norme 1.(d) le groupe $\mathfrak{S}(M)$ des permutations d'un ensemble M , 1pRéponse : C'est l'ensemble des bijections de M dans M .(e) application différentiable et différentielle pour une application $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, où $U \subset \mathbb{R}^2$ est un sous-ensemble ouvert. 1pRéponse : f est différentiable si, pour tout $(x_0, y_0) \in U$, il existe deux réels a et b tels que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - bk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

La différentielle de f au point (x_0, y_0) est l'application linéaire qui associe, à tout couple de réels (h, k) , le réel $ah + bk$.

2. Énoncer le théorème de classification des isométries planes, 2p

Réponse : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une isométrie.1. Si f est un déplacement, alors f est soit une rotation soit une translation.2. Si f est un anti-déplacement, alors f est soit une symétrie axiale, soit une symétrie axiale glissée.3. Définir le groupe \mathbb{Z}_n et faire le tableau de la loi de composition de ce groupe pour $n = 4$. 2pRéponse : \mathbb{Z}_n est l'ensemble des entiers modulo n , sa loi de composition est l'addition modulo n .Table d'addition de \mathbb{Z}_4 :

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

4. Supposons que $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en $(x, y) \in U$ et soit $df(x, y)$ sa différentielle en (x, y) . Écrire explicitement la valeur de $df(x, y)(h, k)$ en utilisant les dérivées partielles de f en (x, y) . 1pRéponse : $df(x, y)(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot k$.**Exercice 2 (11p)** Considérons le point $a(1, 0) \in \mathbb{R}^2$, et soit $R := R_{\frac{2\pi}{3}, 0_{\mathbb{R}^2}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'origine $0_{\mathbb{R}^2}$.1. Exprimer l'isométrie R de trois manière différentes : 2p(a) Par un produit matriciel $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, où A est une matrice carrée de taille 2 à préciser, 0,5p(b) En exprimant séparément les coordonnées x' , y' du point $R(x, y)$ en fonction des coordonnées x , y . 0,5p

(c) En utilisant les affixes. 1p

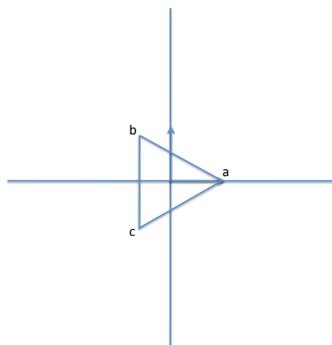
Réponse : $A = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & -\sin \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, d'où $x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y$ et $y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y$.Les affixes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ vérifient $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z$.

2. Déterminer les points $b := R(a)$ et $c := R(b)$.

Réponse : Leurs affixes sont $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

3. Représenter le triangle $\Theta = \triangle abc$ dans un système de coordonnées et montrer qu'il est équilatéral. 1p

Réponse :



Ce triangle est équilatéral, parce que la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'origine transforme a en b , et b en c .

4. Quelles sont les rotations du plan qui laissent Θ invariant ? 1p

Réponse : Les rotations d'angle $0, \frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.

5. Quelles sont les symétries axiales qui laissent Θ invariant ? 1p

Réponse : Les axes de symétrie passent par l'origine et font les angles $0, \frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$ avec l'axe des x .

6. Combien d'éléments a le groupe de symétrie G de Θ ? 1p

Réponse : 6.

7. Décrire explicitement le sous-groupe G_0 de G formé par les isométries *directes* qui laissent Θ invariant. 1p

Réponse : $\{\text{Id}, R, R^2\}$.

8. Montrer que G_0 est abélien et est isomorphe à \mathbb{Z}_3 . 1p

Réponse : Remarquons que $R^m \circ R^n = R^n \circ R^m = R^{m+n}$. D'après la première égalité G_0 est abélien et, d'après la deuxième, l'application Φ de \mathbb{Z}_3 dans G_0 définie par $\Phi(n) = R^n$ est un morphisme. Ce morphisme est bijectif (et un morphisme bijectif s'appelle isomorphisme), parce que les images des éléments $0, 1, 2$ de \mathbb{Z}_3 sont les trois éléments distincts de G_0 , c'est à dire $R^0 = \text{Id}, R^1 = R$ et R^2 .

9. Est-ce que G est abélien ? 1p

Réponse : Non, si on compose deux symétries S_1 et S_2 on n'obtient pas le même résultat qu'en composant S_2 et S_1 .

10. Montrer que chaque élément de G est une application linéaire et écrire la matrice de toutes ces applications linéaires.

Réponse : Ce sont des applications linéaires parce que chacune d'entre elles se définit par un produit matriciel

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

où x, y sont les coordonnées du point M , x', y' sont les coordonnées du point image M' , et A est la matrice de l'application. Les matrices de ces six applications sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (10p) Résoudre les équations différentielles

1. $x^3 y' = 2e^y$ 2p

Réponse : $y = -\ln\left(\frac{1}{x^2} + C\right)$.

2. $(x^2 + 1)y' - 2xy = 0$ 2p

Réponse : $y = (x^2 + 1)C$.

3. $(x^2 + 1)y' - 2xy = 2x$ 2p

Réponse : $y = -1 + (x^2 + 1)C$.

4. $y'' + y' - 12y = 0$ avec les conditions initiales $y(1) = 1, y'(1) = 1$. 2p

Réponse : $y = \frac{2e^4}{7}e^{-4x} + \frac{5}{7e^3}e^{3x}$.

5. $y'' + ky = 0$ (où $k < 0$) avec les conditions initiales $y(0) = y_0$, $y'(0) = v_0$. 2p

Réponse : $y = \left(\frac{y_0}{2} - \frac{v_0}{2\sqrt{-k}}\right)e^{-x\sqrt{-k}} + \left(\frac{y_0}{2} + \frac{v_0}{2\sqrt{-k}}\right)e^{x\sqrt{-k}}$.

Exercice 4 (6p) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq 0_{\mathbb{R}^2} \\ 0 & \text{si } (x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} \end{cases}$.

1. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. *Indication : Traiter soigneusement le cas $(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2}$ en utilisant la définition des dérivées partielles.* 2p

Réponse : $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ est la dérivée de $f(x, 0)$; mais $f(x, 0)$ est nul donc c'est 0.

$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ est la dérivée de $f(0, y)$; mais $f(0, y)$ est nul donc c'est 0.

En tout autre point que $(0, 0)$, f admet des dérivées partielles parce que c'est une composée de fonctions usuelles.

2. Déterminer explicitement $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en un point $(x, y) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$. 1p

Réponse : $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

3. Écrire la matrice jacobienne de f en $0_{\mathbb{R}^2}$. 1p

Réponse : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Montrer que f n'est pas différentiable en $0_{\mathbb{R}^2}$. 2p

Réponse : $\frac{f(h, k) - f(0, 0) - 0 \cdot h - 0 \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ ne tend pas vers 0 quand (h, k) tend vers $(0, 0)$: si $h = k$ ça vaut $\frac{1}{2}$.