ALGÈBRE

- I -

$$q(x_1, x_2, x_3) = -3x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + x_3^2.$$

1) La décomposition de Gauss est

$$q(x_1, x_2, x_3) = -3\ell_1(x_1, x_2, x_3)^2 + \frac{4}{3}\ell_2(x_1, x_2, x_3)^2 - 4\ell_3(x_1, x_2, x_3)^2$$

avec
$\ell_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3$
$\ell_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 + 2x_3$
$\ell_3(x_1, x_2, x_3) = x_3$.

2) La base $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ est duale de
$f_1 = (1, 0, 0)$
$f_2 = \left(\frac{2}{3}, 1, 0\right)$
$f_3 = (-1, -2, 1)$.

3) a) Forme bilinéaire symétrique telle que $q(x) = f(x, x)$:

$$f(x, y) = -3x_1y_1 + 2(x_1y_2 + x_2y_1) + (x_1y_3 + x_3y_1) + 2(x_2y_3 + x_3y_2) + x_3y_3.$$

b) Matrices de f :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

4) a) La base de vecteurs propres de A est :

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Elle est ortogonale pour la forme bilinéaire f et pour le produit scalaire usuel ($f(v_i, v_j) = 0$ et $(v_i|v_j) = 0$).
b) La matrice de f dans cette base est

$$C = \begin{pmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & 10 + 10\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2 & 10 - 10\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

- II -

1) a) F est l'ensemble des $(-2x_2 - 3x_3, x_2, x_3)$, il a donc pour base
$e_1 = (-2, 1, 0)$
$e_2 = (-3, 0, 1)$.
b) $\det(e_1, e_2, u) = 6 \neq 0$.
Orthonormalisation de Gram-Schmidt :
$e_2' = e_2 - \frac{6}{5} e_1$ est orthogonal à e_1 ;
$e_3' = u - \frac{1}{7} e_1 + \frac{2}{7} e_2$ est orthogonal à e_1 et e_2.

La base orthonormée associée à $\{e_1, e_2, u\}$ est donc :

$$\left\{ \frac{e_1}{\|e_1\|}, \frac{e_2'}{\|e_2'\|}, \frac{e_3'}{\|e_3'\|} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0), \; \frac{1}{3\sqrt{5}}\,(-3, -6, 5)\,, \; \frac{1}{\sqrt{14}}\,(1, 2, 3) \right\}.$$

2) a)
$p(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{14}\,(13x_1 - 2x_2 - 3x_3,\; -2x_1 + 10x_2 - 6x_3,\; -3x_1 - 6x_2 + 5x_3)$,
$s(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{7}\,(6x_1 - 2x_2 - 3x_3,\; -2x_1 + 3x_2 - 6x_3,\; -3x_1 - 6x_2 - 52x_3)$.
b) Distance de (x_1, x_2, x_3) à F :

$$\|(x_1, x_2, x_3) - p(x_1, x_2, x_3)\| = \frac{|x_1 + 2x_2 + 3x_3|}{\sqrt{14}}.$$