

Exercice 1. 1. Montrer que si $|x| \leq 2$, alors $|x^2 - 2| \leq 2$.

Réponse: Se déduit du tableau de variation de la fonction $\varphi(x) = x^2 - 2$.

x	-2	0	2
$\varphi'(x)$		-	+
$\varphi(x)$	2	$\searrow$	$\nearrow$ 2

On pose $f_0(x) = 1$ et

$$f_{n+1}(x) = 1 + \frac{1}{4} \int_0^x f_n(t^2 - 2) dt. \quad (*)$$

2. Calculer f_1 et f_2 .

Réponse: $f_1(x) = 1 + \frac{x}{4}$ et $f_2(x) = 1 + \frac{x}{8} + \frac{x^3}{48}$.

3a. Montrer que $\sup_{x \in [-2, 2]} |f_n(x)| \leq 2$.

Réponse: On déduit de (*) l'inégalité

$$|f_{n+1}(x)| \leq 1 + \frac{1}{4} x \sup_{\alpha \in [-2, 2]} |f_n(\alpha)|$$

(ce faisant on a utilisé la question 1, pour majorer les $f(t^2 - 2)$ par $\sup_{\alpha \in [-2, 2]} |f_n(\alpha)|$).

L'inégalité $\sup_{x \in [-2, 2]} |f_n(x)| \leq 2$ s'en déduit, par récurrence.

3b. Montrer que

$$\sup_{x \in [-2, 2]} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2} \sup_{x \in [-2, 2]} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|. \quad (**)$$

Réponse: On déduit de (*) que

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{4} \int_0^x (f_n(t^2 - 2) - f_{n-1}(t^2 - 2)) dt$$

et on en déduit l'inégalité demandée, puisque les $|f_n(t^2 - 2) - f_{n-1}(t^2 - 2)|$ sont inférieurs ou égaux à $\sup_{x \in [-2, 2]} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|$.

4. Montrer que f_n converge uniformément sur $[-2, 2]$ et que la fonction limite est de classe C^1 .

Réponse: On peut considérer la suite f_n comme une série puisque

$$f_n = f_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (f_{k+1} - f_k).$$

Cette série converge normalement parce que (en conséquence de (**))

$$\sup_{x \in [-2, 2]} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Pour démontrer que la fonction limite est de classe C^1 , on a besoin de la convergence uniforme de la série des dérivées. Elle se déduit de celle de la série elle-même puisque (en conséquence de $(*)$)

$$f'_{n+1}(x) = \frac{1}{4}f_n(x^2 - 2). \quad (***)$$

5. Montrer que l'équation fonctionnelle $f'(x) = \frac{1}{4}f(x^2 - 2)$ a une solution ($x \in [-2, 2]$, $f(0) = 1$).
*Réponse: Faire $n \rightarrow +\infty$ dans $(***)$.*

Exercice 2. Équation différentielle $(1 + x^2)y'' + xy' - \frac{1}{4}y = 0$.

1. Quelle relation doit satisfaire a_n pour que la fonction $y(x) = \sum_0^{+\infty} a_n x^n$ soit solution?

Réponse: À l'intérieur du disque de convergence de cette série on a

$$y'(x) = \sum_0^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_0^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Dans la deuxième égalité on peut se restreindre à $n \geq 2$, puisque $n(n-1)$ est nul si $n = 0$ ou 1 . Pour éviter d'avoir des x^{n-2} on peut écrire cette égalité sous la forme

$$y''(x) = \sum_0^{+\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} x^m$$

(m c'est $n-2$, qui va de 0 à $+\infty$ quand n va de 2 à $+\infty$).

Alors $y(x) = \sum_0^{+\infty} a_n x^n$ est solution de l'équation différentielle ssi

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n-1)a_n + na_n - \frac{1}{4}a_n = 0.$$

2. Montrer que cette relation détermine a_n , connaissant a_0 et a_1 .

Réponse: Cette relation peut s'écrire

$$a_{n+2} = -\frac{n^2 - \frac{1}{4}}{n^2 + 3n + 2} a_n,$$

elle permet donc de calculer $a_2, a_3, \dots$ connaissant a_0 et a_1 .

3. Rayon de convergence de $\sum_0^{+\infty} a_n x^n$.

Réponse: C'est 1 par le critère de d'Alembert. En fait on applique ce critère aux séries $\sum_0^{+\infty} |a_{2k} x^{2k}|$ et

$\sum_0^{+\infty} |a_{2k+1} x^{2k+1}|$, de façon à pouvoir utiliser la relation qu'on a obtenue à la question précédente. La

série $\sum_0^{+\infty} |a_n x^n|$ est la somme de ces deux séries, et elle est plus grande que $\sum_0^{+\infty} |a_{2k} x^{2k}| = +\infty$ si $|x| > 1$.

Exercice 3. 1. et 2. sont des questions de cours.

Dans la suite de l'exercice, on cherche les solutions 1-périodiques et dérivables de l'équation fonctionnelle

$$y'(t) + y\left(t - \frac{1}{4}\right) - y\left(t - \frac{1}{2}\right) = \cos 2\pi t.$$

3. Montrer que si y est solution, alors y' est dérivable et de classe C^∞ .

Réponse: y' est dérivable parce qu'il s'exprime en fonction de y :

$$y'(t) = -y\left(t - \frac{1}{4}\right) + y\left(t - \frac{1}{2}\right) + \cos 2\pi t.$$

Par récurrence, il est de classe C^n pour tout n parce qu'en dérivant $n-1$ fois la relation précédente on a

$$y^{(n)}(t) = -y^{(n-1)}\left(t - \frac{1}{4}\right) + y^{(n-1)}\left(t - \frac{1}{2}\right) + (\cos 2\pi t)^{(n-1)}.$$

4. $y(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n t}$ avec $c_n = \int_0^1 e^{-2\pi i n t} y(t) dt$, calculer les coefficients de Fourier des fonctions suivantes:

(a) y' (coefficients notés c'_n);

(b) $y\left(t - \frac{1}{4}\right)$ (coefficients notés c_n^+);

(c) $y\left(t - \frac{1}{2}\right)$ (coefficients notés c_n^-).

Réponse:

(a) $c'_n = c_n 2\pi i n$;

(b) $c_n^+ = c_n e^{-\frac{\pi i n}{2}} = c_n (-i)^n$;

(c) $c_n^- = c_n e^{-\pi i n} = c_n (-1)^n$.

5. En déduire la série de Fourier de $y'(t) + y\left(t - \frac{1}{4}\right) - y\left(t - \frac{1}{2}\right)$.

Réponse: $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (2\pi i n + (-i)^n - (-1)^n) e^{2\pi i n t}$.

6. Vérifier $2\pi i n + (-i)^n - (-1)^n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Réponse: Sa partie imaginaire vaut $2\pi n$ si n est pair; sa partie réelle vaut $-(-1)^n$ si n est impair.

7. Déterminer toutes les solutions de l'équation fonctionnelle.

Réponse: Compte tenu que la série de Fourier de $\cos 2\pi t$ est

$$\cos 2\pi t = \frac{1}{2} e^{2\pi i t} + \frac{1}{2} e^{-2\pi i t}$$

et compte tenu de la question 5, les c_n sont nuls sauf

$$c_1 = \frac{1}{2(2\pi i 1 + (-i)^1 - (-1)^1)} \quad \text{et} \quad c_{-1} = \frac{1}{2(2\pi i (-1) + (-i)^{-1} - (-1)^{-1})}.$$

La solution de l'équation fonctionnelle est donc

$$y(t) = \frac{1}{2(2\pi i - i + 1)} e^{2\pi i t} + \frac{1}{2(-2\pi i + i + 1)} e^{-2\pi i t}.$$