Université de Provence
Semestre 2

Licence SPC
Devoir 1

MATHEMATIQUES POUR PC 2
Corrigé du devoir 1

I

Soient $R_{z_0,\alpha}$ la rotation de centre $z_0 = x_0 + iy_0$ et d'angle α, T_v la translation de vecteur v, $S_{z_1,\beta}$ la réflexion par rapport à la droite qui passe par le point $z_1 = x_1 + iy_1$ et qui fait un angle β avec l'axe des x, et H_λ l'homothétie de rapport λ.

Pour chacune de ces transformations, on appellera $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un point M du plan et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ les coordonnées de son image M'. Rappeler dans chaque cas par quelles formules matricielles on peut obtenir $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et par quelles formules on obtient l'affixe $z' = x' + iy'$ en fonction de $z = x + iy$.

Réponses :

Pour la rotation : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$ et $\boxed{z' = z_0 + e^{i\alpha}(z - z_0)}$.

Pour la translation de vecteur $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ et $\boxed{z' = z + (v_1 + iv_2)}$.

Pour la réflexion : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(2\beta) & \sin(2\beta) \\ \sin(2\beta) & -\cos(2\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix}$ et $\boxed{z' = z_1 + e^{2i\beta}(\bar{z} - \bar{z}_1)}$.

Pour l'homothétie de centre O et de rapport λ : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\boxed{z' = \lambda z}$.

II

Déterminer les composées deux à deux des transformations considérées à la question 1, et remplir le tableau suivant :

Réponses :

On utilise plutôt les affixes. Par exemple pour calculer $z'' = R_{z_2,\gamma}(R_{z_0,\alpha}(z))$ on calcule d'abord $z' = R_{z_0,\alpha}(z)$:

$$z' = z_0 + e^{i\alpha}(z - z_0)$$

et on en déduit

$$\begin{aligned} z'' &= z_2 + e^{i\gamma}(z' - z_2) \\ &= z_2 + e^{i\gamma}(z_0 - z_2) + e^{i(\alpha+\gamma)}(z - z_0) \\ &= e^{i(\alpha+\gamma)}z + z_2 + e^{i\gamma}(z_0 - z_2) - e^{i(\alpha+\gamma)}z_0. \end{aligned}$$

C'est une rotation d'angle $\alpha + \gamma$ parce qu'elle est de la forme $z'' = az + b$ avec $a = e^{i(\alpha+\gamma)}$. Pour calculer son centre c'est à dire son point fixe, on appelle c_1 son affixe et on fait

$$c_1'' = c_1 \quad \Leftrightarrow \quad z_2 + e^{i\gamma}(z_0 - z_2) + e^{i(\alpha+\gamma)}(c_1 - z_0) = c_1$$
$$\boxed{c_1 = \frac{z_2 + e^{i\gamma}(z_0 - z_2) - e^{i(\alpha+\gamma)}z_0}{1 - e^{i(\alpha+\gamma)}}}.$$

Pour $R_{z_2,\gamma} \circ T_v$:

$z' = z_2 + e^{i\gamma}(z + v - z_2) = e^{i\gamma}z + e^{i\gamma}v + z_2(1 - e^{i\gamma})$, c'est une rotation de centre $\boxed{c_2 = z_2 + \frac{e^{i\gamma}v}{1 - e^{i\gamma}}}$ et d'angle γ.

Pour $R_{z_2,\gamma} \circ S_{z_1,\beta}$:

$z' = e^{i(2\beta+\gamma)}\bar{z} + z_2 + e^{i\gamma}(z_1 - z_2) - e^{i(2\beta+\gamma)}\bar{z}_1$, c'est de la forme $a_3\bar{z} + b_3$ avec $a_3 = e^{i(2\beta+\gamma)}$ et $\boxed{b_3 = z_2 + e^{i\gamma}(z_1 - z_2) - e^{i(2\beta+\gamma)}\bar{z}_1}$, on peut donc le mettre sous la forme d'une symétrie glissée $T_{v_3} \circ S_{c_3,\beta+\frac{\gamma}{2}}$ avec $\boxed{v_3 = \dfrac{b_3 + e^{i(2\beta+\gamma)}\bar{b}_3}{2}}$ et $\boxed{c_3 = \dfrac{b_3}{2}}$ (la symétrie est glissée parce que le vecteur de translation, d'affixe v_3, est parallèle à l'axe de symétrie).

Pour $R_{z_2,\gamma} \circ H_\lambda$ **:**

$z' = z_2 + e^{i\gamma}(\lambda z - z_2)$ et $\boxed{c_4 = \dfrac{1 - e^{i\gamma}}{1 - \lambda e^{i\gamma}} z_2}$.

Pour $T_w \circ R_{z_0,\alpha}$ **:**

$z' = z_0 + e^{i\alpha}(z - z_0) + w$ et $\boxed{c_5 = z_0 + \dfrac{w}{1 - e^{i\alpha}}}$.

Pour $T_w \circ T_v$ **:**

C'est T_{v+w}.

Pour $T_w \circ S_{z_1,\beta}$ **:**

$z' = z_1 + e^{2i\beta}(\bar{z} - \bar{z}_1) + w$, symétrie glissée, $\boxed{v_6 = \dfrac{w + e^{2i\beta}\bar{w}}{2}}$ et $\boxed{c_6 = \dfrac{z_1 - e^{2i\beta}\bar{z}_1 + w}{2}}$.

Pour $T_w \circ H_\lambda$ **:**

$z' = \lambda z + w$ et $\boxed{c_7 = \dfrac{w}{1 - \lambda}}$.

Pour $S_{z_3,\delta} \circ R_{z_0,\alpha}$ **:**

$z' = z_3 + e^{2i\delta}\left(\bar{z}_0 + e^{-i\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0) - \bar{z}_3\right)$, symétrie glissée, $\boxed{b_8 = z_3 + e^{2i\delta}(\bar{z}_0 - e^{-i\alpha}\bar{z}_0 - \bar{z}_3)}$, $\boxed{v_8 = \dfrac{b_8 + e^{i(2\delta-\alpha)}\bar{b}_8}{2}}$ et $\boxed{c_8 = \dfrac{b_8}{2}}$.

Pour $S_{z_3,\delta} \circ T_v$ **:**

$z' = z_3 + e^{2i\delta}(\bar{z} + \bar{v} - \bar{z}_3)$, symétrie glissée, $\boxed{v_9 = \dfrac{v + e^{2i\delta}\bar{v}}{2}}$ et $\boxed{c_9 = \dfrac{z_3 - e^{2i\delta}\bar{z}_3 + e^{2i\delta}\bar{v}}{2}}$.

Pour $S_{z_3,\delta} \circ S_{z_1,\beta}$ **:**

$z' = z_3 + e^{2i\delta}\left(\bar{z}_1 + e^{-2i\beta}(z - z_1) - \bar{z}_3\right)$ et $\boxed{c_{10} = \dfrac{z_3 + e^{2i\delta}(\bar{z}_1 - e^{-2i\beta}z_1 - \bar{z}_3)}{1 - e^{2i(\delta-\beta)}}}$.

Pour $S_{z_3,\delta} \circ H_\lambda$ **:**

$z' = z_3 + e^{2i\delta}(\lambda\bar{z} - \bar{z}_3)$ et $\boxed{c_{11} = \dfrac{z_3 - e^{2i\delta}\bar{z}_3}{1 + \lambda}}$.

Pour $H_\mu \circ R_{z_0,\alpha}$ **:**

$z' = \mu\left(z_0 + e^{i\alpha}(z - z_0)\right)$ et $\boxed{c_{12} = \dfrac{1 - e^{i\alpha}}{1 - \mu e^{i\alpha}}\mu z_0}$.

Pour $H_\mu \circ T_v$ **:**

$z' = \mu(z+v)$ et $\boxed{c_{13} = \dfrac{\mu v}{1-\mu}}$.

Pour $H_\mu \circ S_{z_1,\beta}$ **:**

$z' = \mu\left(z_1 + e^{2i\beta}(\bar{z} - \bar{z}_1)\right)$ et $\boxed{c_{14} = \dfrac{\mu(z_1 - e^{2i\beta}\bar{z}_1)}{1+\mu}}$.

Pour $H_\mu \circ H_\lambda$ **:**

$z' = \lambda\mu z$.

$\circ$	$R_{z_0,\alpha}$	T_v	$S_{z_1,\beta}$	H_λ
$R_{z_2,\gamma}$	$R_{c_1,\alpha+\gamma}$	$R_{c_2,\gamma}$	$T_{v_3} \circ S_{c_3,\beta+\frac{\gamma}{2}}$	$R_{c_4,\gamma} \circ H_{c_4,\lambda}$
T_w	$R_{c_5,\alpha}$	T_{v+w}	$T_{v_6} \circ S_{c_6,\beta}$	$H_{c_7,\lambda}$
$S_{z_3,\delta}$	$T_{v_8} \circ S_{c_8,\delta-\frac{\alpha}{2}}$	$T_{v_9} \circ S_{c_9,\delta}$	$R_{c_{10},2(\delta-\beta)}$	$S_{c_{11},\delta} \circ H_{c_{11},\lambda}$
H_μ	$H_{c_{12},\mu} \circ R_{c_{12},\alpha}$	$H_{c_{13},\mu}$	$S_{c_{14},\beta} \circ H_{c_{14},\mu}$	$H_{\lambda\mu}$