Université de Provence	2008–2009

Corrigé de l'atelier

Lundi 10 novembre 2008

Suites

Exercice 1. *Suite définie par une relation de récurrence*

La suite (u_n) est définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}.$$

a) Démontrer par récurrence l'inégalité $u_{n+1} > u_n$.

Elle est vraie pour $n = 0$ puisque $u_1 = \sqrt{2}$ et $u_0 = 1$.

Pour tout entier n tel que $u_{n+1} > u_n$ on a $\sqrt{1+u_{n+1}} > \sqrt{1+u_n}$ c'est à dire $u_{n+2} > u_{n+1}$.

L'inégalité $u_{n+1} > u_n$ est donc vraie pour tout entier $n \geq 0$.

b) Démontrer par récurrence l'inégalité $u_n < 2$. En déduire, compte tenu de la question précédente, que la suite (u_n) converge (c'est à dire admet une limite finie).

Elle est vraie pour $n = 0$ puisque $u_0 = 1 < 2$.

Pour tout entier n tel que $u_n < 2$ on a $\sqrt{1+u_n} < \sqrt{3} < 2$ c'est à dire $u_{n+1} < 2$.

L'inégalité $u_n < 2$ est donc vraie pour tout entier $n \geq 0$.

c) La limite de u_n quand $n \to +\infty$ vaut-elle 2? Calculer cette limite (en faisant $n \to +\infty$ dans l'égalité $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$).

Cette limite existe parce que d'après les questions précédentes (u_n) est croissante majorée (par la constante 2). Cette limite, qu'on appelle ℓ, ne vaut pas 2 parce qu'en faisant $n \to +\infty$ dans l'égalité $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ on obtient l'égalité $\ell = \sqrt{1+\ell}$, qui serait visiblement fausse si $\ell = 2$.

L'égalité $\ell = \sqrt{1+\ell}$ implique que $\ell \geq 0$ et que $\ell^2 = 1+\ell$. En résolvant cette équation du second degré on obtient $\boxed{\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ (seule solution positive de l'équation).

Exercice 2. *Suite géométrique*

Indiquer, suivant la valeur de r, si la suite géométrique de terme général $u_n = r^n$ est bornée, monotone, convergente, a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$. Dans le cas où elle est convergente, donner la valeur de sa limite.

$u_n = r^n$	u bornée	u croissante ou décroissante	u convergente	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
$r < -1$	non	non	non	non	non
$r = -1$	oui	non	non	non	non
$-1 < r < 0$	oui	non	oui sa limite est 0	non	non
$0 \leq r < 1$	oui	décroissante	oui sa limite est 0	non	non
$r = 1$	oui	constante	oui sa limite est 1	non	non
$r > 1$	non	croissante	non	non	oui

Exercice 3. *Limites de suites*

a) Calculer les limites des suites définies par

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \quad b_n = \frac{n}{n^2+1}, \quad c_n = \frac{n+2^n}{3^n+1}, \quad d_n = \frac{n+(-1)^n}{n+1}, \quad e_n = \frac{n+\sqrt{2n(n+1)}}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}.$$

Les limites sont $1, 0, 0, 1, 1+\sqrt{2}$.

b) Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs. Expliquer pourquoi, si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

D'après l'hypothèse $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 0, il est donc plus petit que 1 quand n est assez grand. Par conséquent u_{n+1} est plus petit que u_n, c'est à dire la suite (u_n) est décroissante (pour n assez grand).

Elle converge parce qu'elle est décroissante (pour n assez grand) et minorée par la constante 0.

Si on appelle ℓ la limite de u_n (sous entendu quand $n \to +\infty$), alors la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est $\frac{\ell}{\ell}$ (à condition que $\ell \neq 0$). Mais $\frac{\ell}{\ell}$ vaut 1, ce qui contredit l'énoncé. Il est donc impossible que $\ell \neq 0$, c'est à dire on a forcément $\ell = 0$.