Université de Provence 2008–2009

Corrigé de l'atelier

Mercredi 12 novembre 2008

Suites

Exercice 1. *Méthode des conjugués.*

Soit $r_n = \sqrt{\left(n + \frac{1}{n}\right)^\alpha} - \sqrt{n^\alpha}$

(α est un entier fixé).

a) Calculer r_n dans les cas $\alpha = 2$ et $\alpha = 4$, ainsi que sa limite quand $n \to +\infty$.

r_n vaut $\frac{1}{n}$ dans le cas $\alpha = 2$ et $2 + \frac{1}{n^2}$ dans le cas $\alpha = 4$. Sa limite est donc 0 dans le premier cas et 2 dans le second.

b) Si $\alpha = 1$, calculer r_n par la méthode des conjugués et en déduire sa limite quand $n \to +\infty$.

$$r_n = \frac{n + \frac{1}{n} - n}{\sqrt{n + \frac{1}{n}} + \sqrt{n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n + \frac{1}{n}} + \sqrt{n}}.$$

Le dénominateur de la fraction $\frac{1}{\sqrt{n + \frac{1}{n}} + \sqrt{n}}$ tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$ donc cette fraction tend vers 0. Comme $\frac{1}{n}$ tend aussi vers 0 on en déduit $\boxed{\lim_{n\to+\infty} r_n = 0}$.

c) Si $\alpha = 3$, calculer r_n par la méthode des conjugués. Dans l'expression obtenue, mettre n en facteur au numérateur et $n^{\frac{3}{2}}$ en facteur au dénominateur; en déduire la limite de r_n quand $n \to +\infty$.

Cette fois $r_n = \dfrac{\left(n + \frac{1}{n}\right)^3 - n^3}{\sqrt{\left(n + \frac{1}{n}\right)^3} + \sqrt{n^3}} = \dfrac{3n + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^3}}{\sqrt{\left(n + \frac{1}{n}\right)^3} + \sqrt{n^3}}$.

Mettons en facteur la partie principale au numérateur et au dénominateur:

$$r_n = \frac{n}{n^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{3 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4}}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^3} + 1}.$$

La fraction $\frac{n}{n^{\frac{3}{2}}}$ vaut $\frac{1}{\sqrt{n}}$ et tend vers 0. L'autre fraction est plus compliquée mais, compte tenu que $\frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n^4}$ tendent vers 0, elle tend vers $\frac{3}{2}$. On a donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} r_n = 0}$.

Exercice 2. *Suites définies au moyen de factorielles.*

Démontrer que les suites définies par $s_n = \frac{2^n}{n!}$ et $t_n = \frac{n!}{n^n}$ sont décroissantes. Majorer la première par $\frac{4}{n}$ et la deuxième par $\frac{1}{n}$; en déduire leurs limites quand $n \to +\infty$.

$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{2}{n+1}$ est égal à 1 si $n = 1$ et strictement plus petit que 1 si $n \geq 2$. La suite (s_n) est donc décroissante (pour $n \geq 1$).

$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)(n+1)^n}$. Mais $n!(n+1) = (n+1)!$ se simplifie avec le numérateur; on obtient

$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1$, ce qui prouve que la suite (t_n) est décroissante.

On peut écrire s_n sous la forme $\frac{2}{1}\frac{2}{2}\frac{2}{3}\frac{2}{4}\dots\frac{2}{n}$. C'est un produit de fractions qui sont plus petites que 1 sauf la première qui vaut 2. On a donc $s_n \leq 2 \cdot \frac{2}{n} = \frac{4}{n}$ et on en déduit $\boxed{\lim_{n\to+\infty} s_n = 0}$.

On peut écrire t_n sous la forme $\frac{1}{n}\frac{2}{n}\frac{3}{n}\frac{4}{n}\dots\frac{n}{n}$. C'est un produit de fractions qui sont plus petites que 1. La première fraction est $\frac{1}{n}$, on a donc $t_n \leq \frac{1}{n}$ et on en déduit $\boxed{\lim_{n\to+\infty} t_n = 0}$.

Exercice 3. *Racine $n^{\text{ième}}$ de n.*

Soit $u_n = \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$.

a) Vérifier que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^{n(n+1)} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

$\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^{n(n+1)} = \left(\frac{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}{n^{\frac{1}{n}}}\right)^{n(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$. Compte tenu que $n^{n+1} = n \cdot n^n$ cette fraction est aussi égale à $\frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

b) Soit $v_n = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, démontrer que $v_{n+1} < \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = v_n$. En déduire par récurrence $v_n < 1$, pour n supérieur à une certaine valeur qu'on précisera.

v_{n+1} c'est $\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$. Comme $1+\frac{1}{n+1}$ est inférieur à $1+\frac{1}{n}$, on a bien $v_{n+1} < \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Cette expression est égale à v_n parce que $\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$. On a prouvé que $v_{n+1} < v_n$ c'est à dire que la suite (v_n) est strictement décroissante.

On calcule v_3; il est strictement plus petit que 1 donc par décroissance les v_n (pour $n \geq 3$) le sont aussi.

c) Déduire de cette inégalité que la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang (calculer ses quatre premiers termes).

L'égalité de la question a) et l'inégalité de la question b) impliquent $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^{n(n+1)} < 1$ c'est à dire $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, autrement dit la suite (u_n) est strictement décroissante (pour $n \geq 3$). Ses quatre premiers termes sont

$u_1 = 1,\ u_2 \simeq 1,41,\ u_3 \simeq 1,44,\ u_4 \simeq 1,41.$

d) On pose $x_n = u_n - 1$. Dans la formule du binôme:

$$(x_n+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(x_n)^k 1^{n-k}$$

calculer le terme d'indice $k = 0$ et le terme d'indice $k = 2$ (en fonction de x_n). Compte tenu que $(x_n+1)^n$ est minoré par la somme de ces deux termes, en déduire une majoration de x_n (après avoir calculé $(x_n+1)^n$).

Le terme d'indice $k = 0$ vaut 1 et le terme d'indice $k = 2$ vaut $\frac{n(n-1)}{2}(x_n)^2$. On a donc

$$(x_n+1)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}(x_n)^2.$$

Cependant $(x_n+1)^n$ vaut n; on a alors

$$n - 1 \geq \frac{n(n-1)}{2}(x_n)^2$$

et, en simplifiant par $n-1$ on en déduit $1 \geq \frac{n}{2}(x_n)^2$ c'est à dire $(x_n)^2 \leq \frac{2}{n}$ et $x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}$.

e) Déduire de cette majoration la valeur de $\lim_{n\to+\infty} x_n$ et celle de $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)$.

x_n est compris entre 0 et $\sqrt{\frac{2}{n}}$ par conséquent $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right) = 1$.