Université de Provence 2008–2009

Corrigé de l'atelier

Lundi 17 novembre 2008

Limites de fonctions

Exercice 1. *Méthode des conjugués.*

Calculer les limites, quand $x \to 0$ et quand $x \to +\infty$, de $\dfrac{\sqrt{|1+x^m|}-\sqrt{|1-x^m|}}{x^n}$ (m et n sont deux entiers naturels fixés).

La méthode des conjugués donne

$$\frac{\sqrt{|1+x^m|}-\sqrt{|1-x^m|}}{x^n} = \frac{|1+x^m|-|1-x^m|}{x^n\left(\sqrt{|1+x^m|}+\sqrt{|1-x^m|}\right)}.$$

Quand x tend vers 0, $1+x^m$ et $1-x^m$ sont positifs et tous les deux égaux à leurs valeurs absolues. Par contre si x tend vers $+\infty$, $1-x^m$ est négatif et il faut remplacer $|1-x^m|$ par $-(1-x^m)$. On a donc (après simplification)

$$\frac{\sqrt{|1+x^m|}-\sqrt{|1-x^m|}}{x^n} = \frac{2x^m}{x^n\left(\sqrt{|1+x^m|}+\sqrt{|1-x^m|}\right)} \text{ si } x\to 0, \text{ et } \frac{2}{x^n\left(\sqrt{|1+x^m|}+\sqrt{|1-x^m|}\right)} \text{ si } x\to+\infty. \quad (1)$$

Compte tenu que $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ tend vers 0 (quand $x\to 0$) si la constante $m-n$ est strictement positive, vers 1 si cette constante est nulle et vers $\pm\infty$ si elle est strictement négative, on conclut que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|1+x^m|}-\sqrt{|1-x^m|}}{x^n} = \begin{cases} 0 & \text{si } m-n>0 \\ 1 & \text{si } m-n=0 \\ +\infty & \text{si } m-n<0 \text{ et } m-n \text{ pair} \\ +\infty & \text{si } m-n<0,\ m-n \text{ impair et } x\to 0^+ \\ -\infty & \text{si } m-n<0,\ m-n \text{ impair et } x\to 0^-. \end{cases}$$

La limite quand $x\to+\infty$ est plus simple: d'après (**??**)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{|1+x^m|}-\sqrt{|1-x^m|}}{x^n} = \begin{cases} 0 & \text{si } m>0 \text{ ou } n>0 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \text{si } m=n=0. \end{cases}$$

Exercice 2. *Limites infinies.*

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $[\alpha,+\infty[$. Démontrer l'équivalence

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = +\infty \Leftrightarrow \forall a\in\mathbb{R},\ \lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax) = +\infty$$

(indication: si une fonction f vérifie $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = +\infty$, il suffit d'exprimer $f(x)-ax$ en fonction de $\frac{f(x)}{x}$ et de x pour s'apercevoir qu'il tend vers $+\infty$. Réciproquement, si une autre fonction f vérifie $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax) = +\infty$ pour tout $a\in\mathbb{R}$, il faut utiliser la définition de $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ pour démontrer que cette limite est infinie).

On suppose que $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = +\infty$. Comme $f(x)-ax = x\left(\frac{f(x)}{x}-a\right)$, il est clair que $f(x)-ax$ tend aussi vers $+\infty$ quand $x\to+\infty$.

Réciproque: une autre fonction f est supposée vérifier $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax) = +\infty$ pour tout $a\in\mathbb{R}$. Alors il existe évidemment un réel M tel que $f(x)-ax\geq 0$ pour tout $x\geq M$. L'inégalité $f(x)-ax\geq 0$ est équivalente à $\frac{f(x)}{x}\geq a$. Comme on a supposé que c'est vrai pour tout $a\in\mathbb{R}$, $\frac{f(x)}{x}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 3. *Calculs de limites.*

Calculer $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ *(en supposant connue la limite* $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$*)*, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$, $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$, $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x}$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan x}{\cos^2 x-1}$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+2}{x^2\ln x}$ *(utiliser la limite connue de $x\ln x$ quand $x\to 0^+$)*, $\lim\limits_{x\to 0}\big(x\ln(x+x^2)\big)$.

Calculer les limites, quand x tend vers $0^-, 0^+, -\infty$ ou $+\infty$, de $\dfrac{x}{a}E\left(\dfrac{b}{x}\right)$ et de $\dfrac{b}{x}E\left(\dfrac{x}{a}\right)$

(a et b sont deux réels strictement positifs fixés, $E(x)$ est la partie entière de x c'est à dire $E(x)$ appartient à $\mathbb{Z}$ et $E(x)\leq x<E(x)+1$).

Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ suivant que $0<a<b$ ou $0<b<a$.

Les limites sont $4, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, 1, -1, \frac{2}{3}, -\infty, -\infty, 0, \frac{b}{a}, \frac{b}{a}, +\infty, 0, +\infty, 0, \frac{b}{a}, \frac{b}{a}, b, a$.