Université de Provence 2008–2009

Corrigé de l'atelier

MERCREDI 19 NOVEMBRE 2008

FONCTIONS CONTINUES, FONCTIONS RÉCIPROQUES

Exercice 1. *Calcul de fonctions réciproques.*

a) On définit une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$. Vérifier $-1 < f(x) < 1$.

Il s'agit de vérifier que $f(x)+1$ et $1-f(x)$ sont positifs. On calcule

$$f(x)+1 = \frac{x}{1+|x|}+1 = \frac{x+1+|x|}{1+|x|} \quad \text{et} \quad 1-f(x) = 1-\frac{x}{1+|x|} = \frac{1+|x|-x}{1+|x|}.$$

On appelle que $|x|$ est positif pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $|x|$ vaut x ou $-x$, autrement dit $|x| = \pm x$ et $x = \pm|x|$. On a donc

$$f(x)+1 = \frac{\pm|x|+1+|x|}{1+|x|} \quad \text{et} \quad 1-f(x) = \frac{1+|x|-(\pm|x|)}{1+|x|}.$$

Ces deux fractions ont un dénominateur positif. Le numérateur de la première est $\pm|x|+1+|x|$, il vaut donc $2|x|+1>0$ ou $1>0$. Le numérateur de la deuxième est $1+|x|-(\pm|x|)$, il vaut donc $1>0$ ou $1+2|x|>0$. On conclut que $f(x)+1$ et $1-f(x)$ sont positifs c'est à dire $-1<f(x)<1$.

b) Vérifier que f est continue et dérivable en $x = 0$.

f est continue en $x=0$ parce que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{0}{1+|0|} = 0$ est égal à $f(0)=0$.

f est dérivable en $x=0$ parce que $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\frac{x}{1+|x|}}{x} = \dfrac{1}{1+|x|}$ admet une limite quand $x \to 0$ (cette limite, non demandée dans l'énoncé, est $\dfrac{1}{1+|0|} = 1$ et par conséquent $f'(0)=1$).

c) Pour tout $y \in]-1,1[$ trouver le réel x tel que $y = f(x)$

(on calculera séparément $f^{-1}(y)$ pour $x \geq 0$ et $f^{-1}(y)$ pour $x \leq 0$).

Cela permet-il de dire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ et d'obtenir son application réciproque?

On part d'un réel $y \in]-1,1[$ et on cherche un réel x tel que $y = f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$. Pour pouvoir le calculer il faut savoir si $|x|$ vaut x ou $-x$. Le réel y a même signe que x parce qu'il est égal à la fraction $\dfrac{x}{1+|x|}$ dont le dénominateur est positif; par conséquent

si $y \geq 0$, le réel x qu'on cherche vérifie $y = \dfrac{x}{1+x}$,

si $y \leq 0$, le réel x qu'on cherche vérifie $y = \dfrac{x}{1-x}$.

La première équation $\Leftrightarrow y+yx = x \Leftrightarrow x(1-y) = y$ a pour solution $\boxed{x = \dfrac{y}{1-y}}$. De même la seconde équation a pour solution $\boxed{x = \dfrac{y}{1+y}}$.

f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ parce qu'on a démontré à la question a) que $f(x)$ appartient à $]-1,1[$ et à la question c) que tous les éléments de $]-1,1[$ ont un antécédent unique par f. Le calcul de la question c) prouve aussi que

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y}{1-y} & \text{si } y \in [0,1[\\ \frac{y}{1+y} & \text{si } y \in]-1,0]. \end{cases}$$

d) On définit une application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x \geq 4. \end{cases}$$

Démontrer qu'elle est continue en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ *(on admettra que les fonctions x, x^2 et $8\sqrt{x}$ le sont)*. Démontrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$ il existe $x \in \mathbb{R}$ unique tel que $g(x) = y$, et le calculer. Qu'en déduit-on?

Soit x_0 un réel fixé; pour vérifier la continuité de g en x_0 il faut démontrer que $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$.

Si x_0 est strictement plus petit que 1 alors tous les réels x suffisamment proches de x_0 le sont aussi, et par conséquent $g(x) = x$ tend bien vers $g(x_0) = x_0$.

Si x_0 est strictement compris entre 1 et 4 alors tous les réels x suffisamment proches de x_0 le sont aussi, et par conséquent $g(x) = x^2$ tend bien vers $g(x_0) = (x_0)^2$.

Si x_0 est strictement plus grand que 4 alors tous les réels x suffisamment proches de x_0 le sont aussi, et par conséquent $g(x) = 8\sqrt{x}$ tend bien vers $g(x_0) = 8\sqrt{x_0}$.

Si $x_0 = 1$ alors tous les réels x voisins de 1 vérifient $g(x) = x$ (si $x < 1$) et $g(x) = x^2$ (si $x > 1$), et dans les deux cas $g(x)$ tend vers 1, qui est égal à $g(1)$.

Si $x_0 = 4$ alors tous les réels x voisins de 4 vérifient $g(x) = x^2$ (si $x < 4$) et $g(x) = 8\sqrt{x}$ (si $x > 4$), et dans les deux cas $g(x)$ tend vers 16, qui est égal à $g(4)$.

Comme on a traité tous les cas possibles, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $y \in \mathbb{R}$, cherchons le réel x tel que $g(x) = y$. Remarquons que les images par g des intervalles $]-\infty, 1[$, $[1, 4[$ et $[4, +\infty[$ sont disjoints: ce sont les intervalles $]-\infty, 1[$, $[1, 16[$ et $[16, +\infty[$ (ces intervalles se correspondent respectivement par les fonctions x, x^2 et $8\sqrt{x}$).

Si $y \in]-\infty, 1[$, alors y est l'image de lui-même par g, et le réel x recherché est y;

Si $y \in [1, 16[$, alors y est l'image de $\sqrt{y}$ par g, et le réel x recherché est $\sqrt{y}$;

Si $y \in [16, +\infty[$, alors on résoud l'équation $y = g(x) = 8\sqrt{x}$, on obtient $x = \frac{y^2}{64}$.

On conclut que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (puisqu'on a trouvé un antécédent unique pour chaque réel), et que

$$g^{-1}(y) = \begin{cases} y & \text{si } y < 1 \\ \sqrt{y} & \text{si } 1 \leq y < 16 \\ \frac{y^2}{64} & \text{si } y \geq 16. \end{cases}$$

Exercice 2. *Minimum et maximum d'une fonction continue.*

Trouver (sans faire d'étude de fonction) le minimum et le maximum de la fonction définie (pour tout $x \in \mathbb{R}$) par

$$f(x) = \frac{1 + \cos x}{1 + x^2}.$$

$\cos x$ est compris entre -1 et 1 donc $1 + \cos x$ entre 0 et 2. Comme $1 + x^2$est au moins égal à 1, $f(x) = \frac{1 + \cos x}{1 + x^2}$ est aussi compris entre 0 et 2. Comme de plus $f(0) = 2$ et $f(\pi) = 0$, la valeur minimale de $f(x)$ est 0 et sa valeur maximale est 2.

Exercice 3. *Fonction définie au moyen d'une partie entière.*

Pourquoi la fonction définie par $f(x) = E(x)\sin(\pi x)$ est-elle continue en tout $x \in \mathbb{R}$?

On va vérifier que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ quel que soit le réel x_0. Ce réel appartient à l'intervalle $[E(x_0), E(x_0) + 1[$ (d'après la définition de la partie entière $E(x_0)$), il est donc strictement inférieur à $E(x_0) + 1$. Les réels $x > x_0$ proches de x_0 sont alors dans l'intervalle $[E(x_0), E(x_0) + 1[$ et par conséquent $E(x) = E(x_0)$, ce qui permet de calculer

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} (E(x)\sin(\pi x)) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} (E(x_0)\sin(\pi x)) = E(x_0)\sin(\pi x_0). \tag{1}$$

Quant aux réels $x < x_0$ proches de x_0, leur partie entière est $E(x_0)$ si $x_0 > E(x_0)$, et si $x_0 = E(x_0)$ leur partie entière est $E(x_0) - 1$. Cependant dans ce dernier cas, c'est à dire dans le cas où $x_0 = E(x_0)$ est un nombre entier, le sinus de πx_0 est nul ($\sin 0 = \sin \pi = 0$). On a donc

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} (E(x)\sin(\pi x)) = \begin{cases} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} (E(x_0)\sin(\pi x)) = E(x_0)\sin(\pi x_0) & \text{si } x_0 > E(x_0) \\ \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} ((E(x_0)-1)\sin(\pi x)) = (E(x_0)-1)\sin(\pi x_0) = 0 = E(x_0)\sin(\pi x_0) & \text{si } x_0 = E(x_0). \end{cases} \tag{2}$$

(1) et (2) prouvent que f est continue en tout x_0.

Exercice 4. *Utilisation du théorème des valeurs intermédiaires*

Un marcheur parcourt 4 kilomètres en une heure, démontrer qu'il existe un intervalle de temps d'une durée d'une demi-heure pendant lequel le marcheur aura parcourru 2 kilomètres *(indication: en appelant $f(t)$ la distance parcourrue entre le temps 0 et le temps t, il s'agit d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $g(t) = f\left(t + \frac{1}{2}\right) - f(t)$).*

$f(t)$ représente la position du marcheur au temps t et par conséquent $g(t)$ représente la distance parcourue entre le temps t et le temps $t + \frac{1}{2}$.

Si le marcheur marche lentement pendant la première demi-heure, il aura fait moins de 2 kilomètres et devra en faire plus de 2 pendant la deuxième demi-heure, ce qui fait que $g(0) \leq 2 \leq g\left(\frac{1}{2}\right)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe t tel que $g(t) = 2$, c'est à dire la distance parcourue entre le temps t et le temps $t + \frac{1}{2}$ est de 2 kilomètres.

La conclusion est la même si le marcheur marche rapidement pendant la première demi-heure puisque dans ce cas $g(0) \geq 2 \geq g\left(\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 5. *Fonctions croissantes*

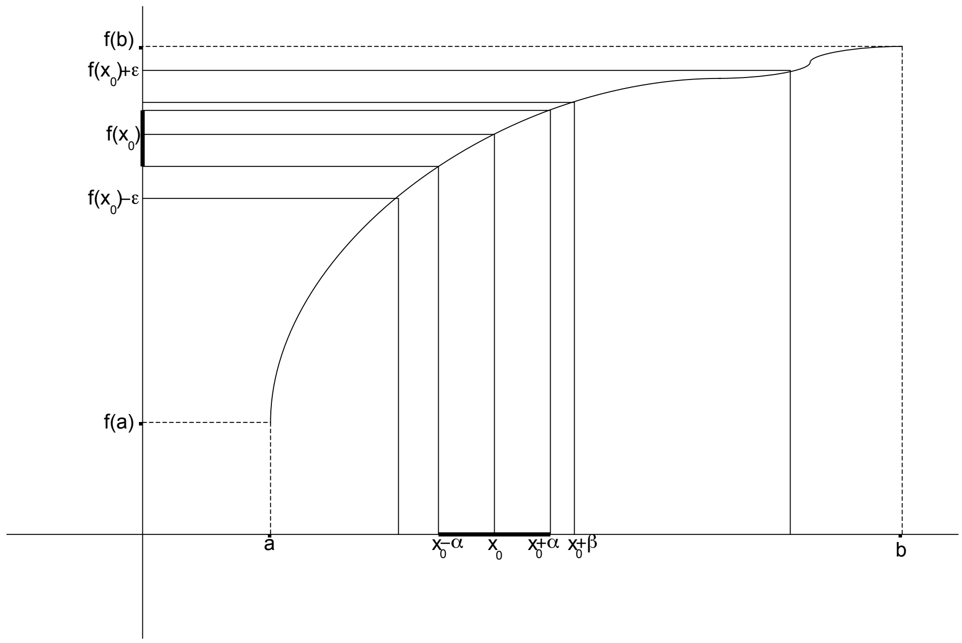
Démontrer que toute application croissante f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ est continue *(indication: il suffit de faire un dessin et d'utiliser la définition de la continuité et de la limite).*

Il faut d'abord interpréter l'hypothèse: d'après celle-ci les éléments de l'intervalle $[f(a), f(b)]$ appartiennent à $f([a, b])$ c'est à dire:

$$\text{pour tout réel } r \in [f(a), f(b)] \text{ il existe } x \in [a, b] \text{ tel que } r = f(x) \tag{3}$$

(autrement dit, sans supposer que f est continue on suppose qu'elle vérifie quand même la condition des valeurs intermédiaires).

Il faut en déduire que f est continue, en interpétant le dessin suivant:



Dans ce dessin on a représenté deux points d'abscisses a et b quelconques, puis la fonction croissante f quelconque qu'on a représentée par une courbe quelconque entre un point d'affixe a et un point d'affixe b. On choisit un point quelconque x_0 entre a et b. La fonction sera continue en x_0 quand on aura prouvé que, pour tout intervalle $]f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon[$ centré en $f(x_0)$, il existe un intervalle $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ centré en x_0 dont l'image par f est incluse dans $]f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon[$.

On choisit donc (sur l'axe des ordonnées) deux points quelconques $f(x_0)-\varepsilon$ et $f(x_0)+\varepsilon$ (symétriques par rapport à $f(x_0)$), puis on place deux points intermédiaires entre ces points et $f(x_0)$, par exemple les points $f(x_0)-\dfrac{\varepsilon}{2}$ et $f(x_0)+\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Ces deux points ont deux antécédents par f d'après l'hypothèse (3), le premier est strictement inférieur à x_0 parce que f est croissante, et parce que s'il était égal à x_0 son image serait $f(x_0)$ et non $f(x_0)-\dfrac{\varepsilon}{2}$. Puisqu'il est strictement inférieur à x_0, on l'appelle $x_0-\alpha$ avec $\alpha>0$. De même le deuxième point c'est à dire $f(x_0)+\dfrac{\varepsilon}{2}$ a un antécédent $x_0+\beta$ avec $\beta>0$. L'intervalle centré en x_0 qu'on cherchait sera $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ si $\alpha\leq\beta$, et $]x_0-\beta, x_0+\beta[$ si $\alpha\geq\beta$: l'image de tout élément de cet intervalle est comprise entre $f(x_0)-\dfrac{\varepsilon}{2}$ et $f(x_0)+\dfrac{\varepsilon}{2}$.