Corrigé de l'atelier

LUNDI 24 NOVEMBRE 2008

THÉORÈME DE ROLLE

Exercice 1. *Dérivées successives*

Soit le polynôme $P(x) = (x^2 - 1)^n = (x + 1)^n(x - 1)^n$ ($n \geq 1$ est un entier). On notera ses dérivées successives $P'(x), P''(x), \dots, P^{(k)}(x), P^{(k+1)}(x), \dots$.

a) On dira que 1 et -1 sont racines d'ordre n du polynôme $P(x)$, puisque $P(x)$ est multiple de $(x+1)^n$ et de $(x-1)^n$. Trouver toutes les racines de $P'(x)$, et leur ordre de multiplicité.

$P'(x) = n(x^2 - 1)^{n-1}2x = n(x+1)^{n-1}(x-1)^{n-1}2x$ est de la forme

$$P'(x) = k(x+1)^{n-1}(x-1)^{n-1}(x-0)^1 \quad \text{avec } k \text{ constante,} \quad (1)$$

donc 1 et -1 sont racines d'ordre $n-1$ et 0 est racine d'ordre 1.

b) En utilisant le théorème de Rolle, démontrer par récurrence la proposition suivante:

pour tout entier k entre 1 et n le polynôme $P^{(k)}(x)$ admet k racines $x_1, \dots, x_k$ telles que $-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < 1$ (*chacune de ces racines dépend de k*), et de plus il admet 1 et -1 comme racines d'ordre $n-k$.

La proposition est vraie pour $k=1$: on a vu que $P'(x)$ admet une racine x_1 strictement comprise entre -1 et 1 (c'est $x_1=0$), et elle admet aussi 1 et -1 comme racines d'ordre $n-1$.

Pour démontrer la proposition par récurrence, il faut considérer un entier k entre 1 et $n-1$ pour lequel cette proposition est vraie, puis vérifier qu'elle est vraie pour $k+1$.

Faisons le pour $k=1$ (parce que c'est plus simple dans ce cas, mais ce n'est pas obligatoire de le faire): la fonction P' s'annule en -1 et en x_1 , donc d'après le théorème de Rolle il existe $c_1 \in]-1, x_1[$ tel que $P''(c_1) = 0$. De même la fonction P' s'annule en x_1 et en 1, donc d'après le théorème de Rolle il existe $c_2 \in]x_1, 1[$ tel que $P''(c_2) = 0$. Ce faisant on a démontré la première partie de la proposition pour $k=2$, c'est à dire $P''(x)$ admet 2 racines c_1, c_2 telles que $-1 < c_1 < c_2 < 1$. Pour démontrer la deuxième partie, mettons l'expression (1) sous la forme

$$P'(x) = (x+1)^{n-1}Q(x) \quad \text{avec } Q(x) = k(x-1)^{n-1}x$$

puis dérivons:

$$P''(x) = (n-1)(x+1)^{n-2}Q(x) + (x+1)^{n-1}Q'(x) = (x+1)^{n-2}((n-1)Q(x) + (x+1)Q'(x)).$$

Ce calcul prouve que $(x+1)^{n-2}$ se met en facteur dans $P''(x)$ et c'est tout ce qu'on voulait savoir. On démontrerait de même que $(x-1)^{n-2}$ se met en facteur dans $P''(x)$. Finalement on a démontré que

$$P''(x) = k_2(x+1)^{n-2}(x-1)^{n-2}(x-c_1)(x-c_2)$$

(où k_2 est une constante, mais ce n'est pas demandé de le démontrer). L'ordre de multiplicité des racines 1 et -1 est $n-2$.

Pour rédiger correctement la récurrence il faut supposer $P^{(k)}(-1) = P^{(k)}(x_1) = \dots = P^{(k)}(x_k) = P^{(k)}(1) = 0$, puis il faut appliquer le théorème de Rolle sur chacun des intervalles $[-1, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_k, 1]$; ce théorème dit que la dérivée de $P^{(k)}$ c'est à dire $P^{(k+1)}$ s'annule en $k+1$ points qui sont $c_1 \in]-1, x_1[, c_2 \in]x_1, x_2[, \dots, c_{k+1} \in]x_k, 1[$. Puis il faut calculer l'ordre de multiplicité de la racine -1 dans $P^{(k+1)}$, en mettant $P^{(k)}(x)$ sous la forme $(x+1)^{n-k}Q(x)$ et en le dérivant. On obtient que cet ordre de multiplicité est $n-(k+1)$, et on fait de même pour la racine -1 . On a alors vérifié que l'hypothèse de récurrence est vraie au rang $k+1$.

c) En déduire que le polynôme $P^{(n)}(x)$ admet n racines simples, strictement comprises entre -1 et 1.

La récurrence qu'on vient de faire fonctionne jusqu'au rang n , et prouve que $P^{(n)}(x)$ admet n racines simples $x_1, \dots, x_n$ qui appartiennent à l'intervalle $] - 1, 1[$.

Exercice 2. Une formule classique

Soit f une fonction définie, continue, dérivable et de dérivée continue sur un intervalle $[a, b]$; on suppose de plus qu'elle est deux fois dérivable sur $]a, b[$. Soit $x \in [a, b]$, démontrer qu'il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = \frac{(x - a)(x - b)}{2} f''(\xi). \quad (2)$$

(Méthode: x étant fixé, on considère une constante k telle que

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = \frac{(x - a)(x - b)}{2} k. \quad (3)$$

Expliquer pourquoi cette constante existe. Puis on définit une fonction auxiliaire g en posant pour tout $t \in [a, b]$

$$g(t) = f(t) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a) - \frac{(t - a)(t - b)}{2} k. \quad (4)$$

Vérifier par le calcul que $g(a) = g(x) = g(b) = 0$. Appliquer le théorème de Rolle à la fonction g sur les intervalles $[a, x]$ et $[x, b]$, puis l'appliquer à g' et conclure

On cherche k tel que l'égalité (3) soit vraie; on pose donc

$$k = \frac{f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)}{\frac{(x - a)(x - b)}{2}}$$

et c'est bien une constante puisqu'on a supposé x fixé. Mais on peut le faire à condition que $\frac{(x - a)(x - b)}{2}$ ne soit pas nul, c'est à dire à condition que x soit différent de a et b . Si $x = a$ ou b , l'équation (3) devient $0 = 0k$ et elle est vérifiée par tout réel k .

Calculons

$$g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) - \frac{(a - a)(a - b)}{2} k = 0,$$

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - \frac{(x - a)(x - b)}{2} k = 0 \text{ (parce que l'égalité (3) est vraie pour la valeur de } k \text{ qu'on a choisie),}$$

$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) - \frac{(b - a)(b - b)}{2} k = 0.$$

On peut alors appliquer Rolle sur l'intervalle $[a, x]$: $g(t)$ s'annulant en $t = a$ et en $t = x$, il existe $c_1 \in]a, x[$ tel que $g'(c_1) = 0$.

Puis appliquer Rolle sur l'intervalle $[x, b]$: $g(t)$ s'annulant en $t = x$ et en $t = b$, il existe $c_2 \in]x, b[$ tel que $g'(c_2) = 0$.

Puis appliquer Rolle à la fonction g' sur l'intervalle $[c_1, c_2]$: $g'(t)$ s'annulant en $t = c_1$ et en $t = c_2$, il existe $c_3 \in]x, b[$ tel que $g''(c_3) = 0$.

Puis il faut vérifier que c_3 est le réel ξ qu'on cherchait, c'est à dire qu'il vérifie l'égalité (2). Pour utiliser ce qu'on sait sur c_3 , c'est à dire pour utiliser $g''(c_3) = 0$, il faut calculer g'' . En partant de la définition de g c'est à dire de (4),

$$g'(t) = f'(t) - 0 - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - \frac{t - b + t - a}{2} k,$$

$$g''(t) = f''(t) - 0 - 0 - \frac{2}{2} k = f''(t) - k.$$

L'égalité $g''(c_3) = 0$ équivaut donc à $f''(c_3) = k$ et, compte tenu de (3), elle équivaut à (2) (avec $\xi = c_3$).