Licence "Sciences et Technologies", Université de Provence

Année 2008-2009, semestre 1

Mathématiques générales 1

Corrigé du contrôle continu du 28 novembre 2008

Calculette et documents non autorisés

On conseille de lire l'énoncé entièrement avant de commencer

Exercice 1

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x^2 - 1).$$

   $]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$ et $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

2. Montrer que les fonctions f et g sont continues et dérivables, puis calculer leurs dérivées.
   On sait que les fonctions polynômes, racine carrée et logarithme sont dérivables. Comme f et g sont des composées de ces fonctions, elles sont dérivables.

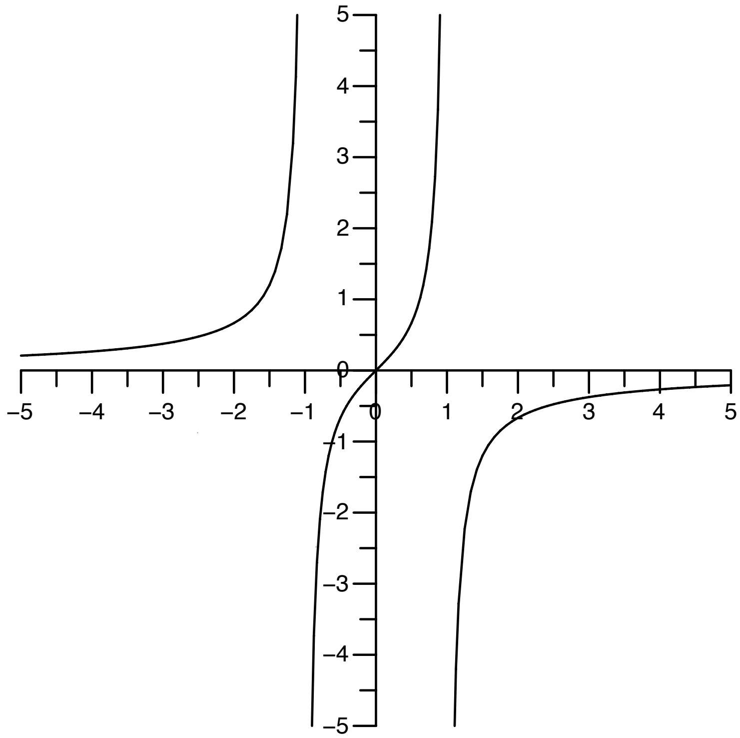
$$f'(x) = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 2}} \quad \text{et} \quad g'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

Exercice 2

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{1 - x^2}$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
   $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.
2. Montrer que f est continue et dérivable sur son domaine de définition.
   C'est un quotient de polynômes.
3. Calculer la dérivée de f. Dresser le tableau de variation de f en précisant les limites de f aux extrémités de son domaine de définition. Donner l'allure de la courbe représentative de f.
   $f'(x) = \dfrac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2}$.

x	$-\infty$			-1			1			$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$\Vert$		$+$	$\Vert$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\Vert$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$		$\nearrow$	0



4. La fonction f est-elle bijective ? Justifier votre réponse.

   Non, l'équation $f(x) = 1$ se ramène à résoudre une équation du second degré, qui a un discriminant strictement positif et donc deux solutions ; alors qu'elle devrait avoir une solution unique si f était bijective.

5. Sur $]-1, 1[$ montrer que f est bijective et vérifier que sa fonction réciproque est donnée par

$$f^{-1}(y) = \frac{2y}{1 + \sqrt{1 + 4y^2}}.$$

   Bijective parce que croissante sur un intervalle (et définie en tout point de cet intervalle). On obtient sa fonction réciproque en résolvant l'équation $f(x) = y$ (pour chaque $y \in \mathbb{R}$ il faut calculer x et l'appeler $f^{-1}(y)$).

$$\begin{aligned} \frac{x}{1 - x^2} = y \quad \Leftrightarrow \quad & x = y - yx^2 \\ & yx^2 + x - y = 0 \\ & x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4y^2}}{2y} \end{aligned}$$

   Cet x, il faut le trouver dans $]-1, 1[$ d'après l'énoncé. On voit bien que $\frac{-1 - \sqrt{1 + 4y^2}}{2y}$ n'appartient pas à cet intervalle, et donc $x = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4y^2}}{2y}$. Il ne reste plus qu'à utiliser la méthode des conjugués, pour obtenir l'expression demandée dans l'énoncé.

6. Cette fonction réciproque est elle continue ? dérivable ?

   Par les théorèmes de continuité et de dérivation des fonctions réciproques puisque la dérivée de f ne s'annule pas.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_{n+1} = \frac{4u_n + 2}{u_n + 5} \quad \text{et} \quad u_0 \in \mathbb{R}$$

et soit (v_n) la suite de terme général

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}.$$

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -5$ et $u_n \neq -2$.

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Donner son terme général.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} \\ &= \frac{\frac{4u_n+2}{u_n+5} - 1}{\frac{4u_n+2}{u_n+5} + 2} \\ &= \frac{\frac{4u_n+2-u_n-5}{u_n+5}}{\frac{4u_n+2+2u_n+10}{u_n+5}} \\ &= \frac{3(u_n - 1)}{6(u_n + 2)} \\ &= \frac{1}{2} v_n. \end{aligned}$$

Le terme général est $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0$.

2. En déduire le terme général de la suite (u_n) .

De l'égalité $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$ on tire $u_n = \frac{2v_n + 1}{1 - v_n}$ et, en utilisant l'égalité $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{u_0-1}{u_0+2} + 1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{u_0-1}{u_0+2}} \\ &= \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - 1) + u_0 + 2}{u_0 + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - 1)}. \end{aligned}$$

3. Discuter selon le signe de v_0 la monotonie de (v_n) et préciser les bornes de l'ensemble des v_n. Montrer que dans tous les cas elle converge vers 0.

La suite (v_n) (calculée à la question 1) est géométrique de raison strictement plus petite que 1, elle est donc décroissante si $v_0 \geq 0$, croissante si $v_0 \leq 0$ et ses deux bornes sont v_0 et $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$.

4. On suppose $u_0 = 0$. Montrer qu'alors (u_n) est définie pour tout n et qu 'elle converge vers 1.

On démontre d'abord que u_n est défini et au moins égal à 0, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ puisque $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{4u_n + 2}{u_n + 5}$. Ensuite compte tenu que $u_n \geq 0$ ne peut valoir -2, on peut utiliser les questions précédentes et l'expression trouvée à la question 2 (avec $u_0 = 0$) prouve que la limite de u_n est 1.

Exercice 4

Soit $g :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0. Soit $\tilde{g}$ telle que $\tilde{g}(0) = 0$ et $\tilde{g} = g$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Cette fonction tend vers 0 quand x tend vers 0 parce qu'elle est comprise entre $-x^2$ et x^2 (du fait que le sinus est compris entre -1 et 1). Son prolongement par continuité est donc $\tilde{g}$.

2. Montrer que $\tilde{g}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $\tilde{g}'$.

   $\tilde{g}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables, et compte tenu parce que x^2 et $\frac{1}{x}$ sont dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\tilde{g}(x) = g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (valable pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, mais pas pour $x = 0$).

   $g'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

3. Montrer que $\tilde{g}$ est dérivable à droite en 0.

   La dérivée de $\tilde{g}$ à droite de 0 est la limite du taux d'accroissement $\frac{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(0)}{x - 0}$ quand x tend vers 0 et $x > 0$. Ce taux d'accroissement vaut alors $x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et tend vers 0 puisque $-x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$ pour tout $x > 0$. Ce qui prouve que $\tilde{g}$ est dérivable à droite en 0 (et que sa dérivée en 0 est nulle).

4. Montrer que la limite de $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas quand x tend vers 0 (on pourra considérer deux suites judicieusement choisies tendant vers 0 par valeurs supérieures).

   Pour $x = \frac{1}{2k\pi}$ avec $k \geq 1$ entier, $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ vaut $\cos(2k\pi) = 1$ tandis que pour $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ avec $k \geq 1$ entier, $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ vaut $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0$. Ce qui prouve que $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0.

5. En déduire que $\tilde{g}'$ n'est pas continue à droite en 0.

   La fonction $\tilde{g}'$ n'est pas continue à droite en 0 parce que si elle l'était, elle aurait une limite quand x tend vers 0, et $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ aussi puisque d'après la question 2 on a $\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - g'(x)$ (avec $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ qui tend vers 0).

Exercice 5

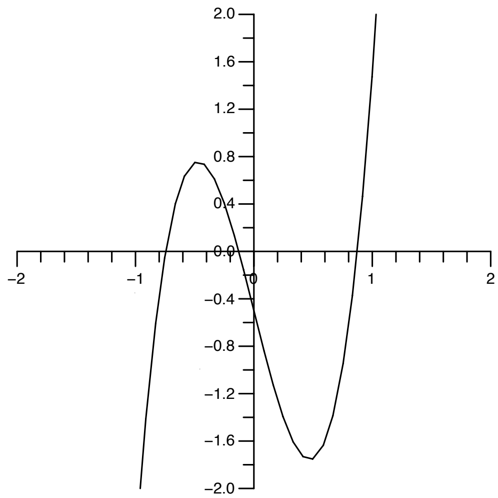
1. Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de Rolle.

   Si f est continue sur $[a, b]$, tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ a au moins un antécédent c'est à dire il existe x tel que $f(x) = y$.

   Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et si $f(a) = f(b)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

2. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
   Soient $a < b$ deux points de I.
   Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et de dérivée continue telle que $f(a) = f(b) = 0$ et $f'(a) > 0$ et $f'(b) > 0$.

(a) Illustrer cette situation par une figure.



(b) Montrer qu'il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a-\alpha, a+\alpha[$. En déduire que $f(x) > 0$ pour tout $x \in]a, a+\alpha[$.

Parce que f' est continue et parce que $f'(a) > 0$: pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $]a-\alpha, a+\alpha[$ tel que $f'(x) \in]f'(a)-\varepsilon, f'(a)+\varepsilon[$ et, si on choisit $\varepsilon = f'(a)$, on en déduit $f'(x) > 0$. On en déduit $f(x) > 0$ pour tout $x \in]a, a+\alpha[$ parce que, f ayant une dérivée positive sur cet intervalle, elle et croissante et prend donc des valeurs supérieures à $f(a) = 0$.

(c) Montrer, de la même manière qu'il existe $\beta > 0$ tel que $f(x) < 0$ pour tout $x \in]b-\beta, b[$.

C'est parce que f est croissante sur cet intervalle, et prend donc des valeurs inférieures à $f(b) = 0$.

(d) Montrer qu 'alors il existe $a < c_1 < c_2 < c_3 < b$ tels que $f(c_2) = 0 = f'(c_1) = f'(c_3)$ (on commencera par prouver l'existence de c_2).

On choisit $x_1 \in]a, a+\alpha[$ et $x_2 \in]b-\beta, b[$. D'après les deux questions précédentes $f(x_1) > 0$ et $f(x_2) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe c_2 entre x_1 et x_2 tel que $f(c_2) = 0$. On a alors $f(a) = f(c_2) = f(b) = 0$ et on applique deux fois le théorème de Rolle (sur $[a, c_2]$ et sur $[c_2, b]$). On obtient $c_1 \in]a, c_2[$ et $c_3 \in]c_2, b[$ tels que $f'(c_1) = f'(c_3) = 0$.