Université de Provence 2008–2009

Corrigé du partiel de MG1

VENDREDI 31 OCTOBRE 2008

$2^{\text{ème}}$ PARTIEL

Exercice 1.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z du plan tel que $\dfrac{|z-i+2|}{|z+3i-2|} = \sqrt{3}$. *(sur* $2(+0,5)$ *points)*

$(x-4)^2 + (y+5)^2 = 24$, c'est le cercle de centre $(4, -5)$ et de rayon $2\sqrt{6}$.

Exercice 2.

Plans d'équations $x - y + 2z - 1 = 0$ et $x - 3z + 4 = 0$.

1) Équation paramétrique de la droite d'intersection; vecteur directeur $\vec{u}$ de cette droite. *(sur* $1,5 + 0,5(+0,5)$ *points)*

On a deux équations, on peut donc calculer x et y en fonction de z.

On obtient $x = 3z - 4$ et $y = 5z - 5$ donc (sous forme paramétrique)

$$\begin{cases} x = 3t - 4 \\ y = 5t - 5 \\ z = t \end{cases}$$

(explication: un point appartient à l'intersection si et seulement si il vérifie les équations des deux plans; c'est équivalent à dire qu'il vérifie les trois équations qu'on a trouvées, avec $t \in \mathbb{R}$ *quelconque. La méthode utilisée pour trouver ces trois équations est arbitraire, on aurait pu choisir* $t = x$ *ou* $t = y$*.* t *représente le temps et on déplace le point* M *sur la droite à la vitesse qu'on veut, cependant on la choisit constante).*

$\vec{u} = (3, 5, 1)$.

2) Vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$, et appartenant à chacun de ces deux plans. *(sur* $0,5 + 0,5(+0,5)$ *points)*

Il suffit de faire le produit vectoriel du vecteur normal de chaque plan par le vecteur $\vec{u}$. On obtient

$(1, -1, 2) \wedge (3, 5, 1) = (-11, 5, 8)$ et $(1, 0, -3) \wedge (3, 5, 1) = (15, -10, 5)$.

3) Sinus de l'angle entre les deux plans. *(sur* $0,5$ *point)*

Il s'agit de l'angle entre $(-11, 5, 8)$ et $(15, -10, 5)$; mais c'est évidemment aussi l'angle entre les vecteurs normaux. Son sinus vaut $\sqrt{\dfrac{7}{12}}$.

Exercice 3.

$\vec{U}(1, 1, 0)$ et $\vec{V}(0, \sqrt{2}+1, 0)$.

1) Angle entre ces deux vecteurs. *(sur* $0,5 + 0,5$ *points)*

$\dfrac{\pi}{4}$.

2) Aire du parallélogramme. *(sur* $0,5 + 0,5$ *points)*

$1 + \sqrt{2}$ (d'après leur produit vectoriel).

3) Équation cartésienne et paramétrique du plan orthogonal à $\vec{U}(1, 1, 0)$ contenant le point $(1, 1, 1)$. *(sur* $1 + 1$ *points)*

$x + y - 2 = 0$ et $\begin{cases} x = s \\ y = 2 - s \\ z = t. \end{cases}$

4) Distance de l'origine à ce plan. *(sur $0,5+0,5$ points)*

$\sqrt{2}$.

Exercice 4.

Cercle de centre $I(3,1)$ et de rayon 2.

1) Équation cartésienne. *(sur $0,5$ point)*

$(x-3)^2+(y-1)^2=4$.

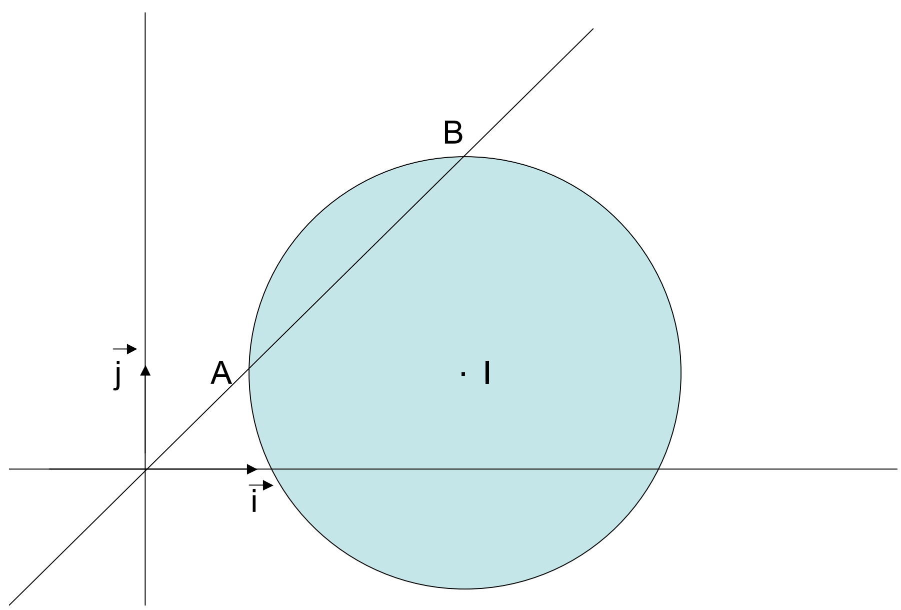
2) Montrer que $M(x,y)$ (point quelconque du plan) est d'argument $\dfrac{\pi}{4}$ si et seulement si $y=x$ et $x\geq 0$. *(sur 1 point)*

Ça vient des formules $x=\rho\cos\theta$ et $y=\rho\sin\theta$. L'égalité $x=y$ équivaut à $\cos\theta=\sin\theta$ c'est à dire $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ modulo π, seulement $\theta=\dfrac{\pi}{4}+\pi$ ne convient pas, il a un cosinus négatif.

3) Points du cercle d'argument $\dfrac{\pi}{4}$. *(sur 1 point)*

$(1,1)$ et $(3,3)$.

4) Figure. *(sur $0,5$ point)*



5) $\vec{IA}$ n'est pas perpendiculaire à la droite. *(sur $0,5$ point)*

Parce que s'il l'était, la droite serait tangente au cercle et le couperait en un point au lieu de deux.

6) La distance de I à la droite est strictement inférieure à 2 (sans calcul). *(sur 1 point)*

Parce que certains des points de la droite sont strictement à l'intérieur du cercle.

Exercice 5.

$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ appartiennent à un même plan, montrer sans calcul que $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge(\vec{u}\wedge\vec{w})=0$. *(sur $1,5(+0,5)$ points)*

$\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \vec{w}$ sont orthogonaux au plan donc colinéaires. Leur produit vectoriel est nul parce que le sinus de leur angle est nul.

Exercice 6.

$A(1,1)$, $B(10,1)$, $C(4,0)$, (AB) passe par A et B et (D) passe par C, et est perpendiculaire à (AB).

1) Équation paramétrique de (AB) et équation cartésienne de (D). Point d'intersection E? *(sur $0,5+0,5+0,5$ points)*

$\begin{cases} x = t \\ y = 1. \end{cases}$ et $x = 4$. $(4,1)$.

2) Donner explicitement $h(z)$, si h est une similitude de centre I, d'angle θ et de rapport r. *(sur $0,5$ point)*

$h(z) = re^{i\theta}z + z_I\left(1 - re^{i\theta}\right)$ (z_I est l'affixe de I).

3) On suppose (D) invariante, en déduire $\theta = 0$ ou π, et $I \in (AB)$. *(sur $1,5$ point)*

$\theta = 0$ ou π parce que c'est l'angle entre (AB) et sa transformée, c'est à dire l'angle entre (AB) et elle même. Si I n'appartenait pas à (AB), l'homothétie transformerait (AB) en une droite parallèle mais plus éloignée de I (si $r > 1$), ou plus proche de I (si $r > 1$). Dans le cas $r = 1$ la rotation d'angle π change (AB) en sa symétrique par rapport à I, qui ne peut être égale à (AB) que si $I \in (AB)$. Par contre si $r = 1$ et $\theta = 0$, le point I est quelconque.

4) Si (D) est aussi invariante, alors $I = E$. *(sur $0,5$ point)*

Parce que le même raisonnement qu'à la question précédente prouve que $I \in (D)$, donc I appartient aux deux droites.

5) On suppose $I = E$ et $h(A) = B$. Montrer que $re^{i\theta} = -2$, puis en déduire les valeurs de r et θ. *(sur $1+0,5$ point)*

On a vu que $h(z) = re^{i\theta}z + z_I\left(1 - re^{i\theta}\right)$, on en déduit que

$$re^{i\theta} = \frac{h(z) - z_I}{z - z_I}.$$

On remplace z_I par $4+i$ puisque $I = E$. Cette égalité est vérifiée par $z = 1+i$ et $h(z) = 10+i$ puisque $h(A) = B$. On a donc

$$re^{i\theta} = \frac{10+i-4-i}{1+i-4-i}$$

ce qui fait $re^{i\theta} = -2$, d'où $r = 2$ (qui est le module de -2), et $\theta = \pi$.