Université de Provence 2008–2009

Corrigé du partiel d'atelier

Mercredi 5 novembre 2008

Géométrie

Rappel: $\vec{u} \wedge \vec{v}$ *est un vecteur orthogonal à* $\vec{u}$ *et à* $\vec{v}$*, et sa longueur est* $||\vec{u}||\,||\vec{v}||\,|\sin(\vec{u},\vec{v})|$*. D'autre part si* $\overrightarrow{M_1M_4} = \overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3}$ *et si on regarde les points* M_2 *et* M_3 *depuis le point* M_4*, alors* M_2 *est à droite de* M_3*.*

Exercice 1. *Cercles (sur 3+3+1 points)*

a) Rappeler la formule qui donne la distance du point $A(x_0, y_0)$ à la droite d'équation $ax + by + c = 0$. En déduire les équations des deux droites orthogonales au vecteur (a, b) et tangentes au cercle de centre A et de rayon R.

$d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

La droite est tangente au cercle si et seulement si:

$d = R$

$|ax_0 + by_0 + c| = R\sqrt{a^2 + b^2}$

$ax_0 + by_0 + c = \pm R\sqrt{a^2 + b^2}$

$c = \pm R\sqrt{a^2 + b^2} - ax_0 - by_0$.

Les équations des tangentes au cercle sont donc $ax+by+R\sqrt{a^2 + b^2}-ax_0-by_0 = 0$ et $ax+by-R\sqrt{a^2 + b^2}-ax_0-by_0 = 0$.

b) Soit $OACB$ un parallélogramme dont deux des côtés sont $[OA]$ et $[OB]$, et soit I le milieu du segment $[AB]$. Démontrer (sans utiliser les coordonnées) que tout point M du cercle de diamètre $[AB]$ vérifie la relation

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}.$$

Dans cette relation il y a deux variables, $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{MC}$. On n'en veut qu'une seule, par exemple on choisit $\overrightarrow{IM}$ comme variable et on écrit

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$

$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{IM}$.

Puis on calcule

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MC} &= (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM})(\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{IM})\\ &= \overrightarrow{OI}^2 - \overrightarrow{IM}^2\\ &= OI^2 - R^2\end{aligned}$$

où $R = IM$ est le rayon du cercle. On obtient le même résultat en calculant $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{IA})$ et on a donc $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$.

c) Quelle est la rotation de centre I qui transforme le parallélogramme en lui-même?

La rotation d'angle π, c'est à dire la symétrie par rapport au point I.

Exercice 2. *Produits scalaires et produits vectoriels (sur 3+2+2 points)*

a) Vérifier l'égalité $\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\wedge\vec{a})$ pour tous vecteurs $\vec{a}(x, y, z)$, $\vec{b}(x', y', z')$, $\vec{c}(x'', y'', z'')$.

En développant $\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c}) = x(y'z'' - y''z') + y(z'x'' - z''x') + z(x'y'' - x''y')$ et

$\vec{b}\cdot(\vec{c}\wedge\vec{a}) = x'(y''z - yz'') + y'(z''x - zx'') + z'(x''y - xy'')$ on obtient les mêmes six termes.

b) Vérifier (sans utiliser les coordonnées) que les vecteurs $\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})$ et $(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ sont tous les deux orthogonaux à $\vec{a}$ et à $(\vec{b}\wedge\vec{c})$; en déduire qu'ils sont colinéaires.

$\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})$ est le produit vectoriel de $\vec{a}$ et$(\vec{b}\wedge\vec{c})$, il est donc orthogonal à $\vec{a}$ et à $(\vec{b}\wedge\vec{c})$.

$(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ est orthogonal à $\vec{a}$ parce que son produit scalaire avec $\vec{a}$ vaut $(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{a}) - (\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{c}\cdot\vec{a}) = 0$ (compte tenu que de la commutativité du produit scalaire des vecteurs et du produit des nombres réels).

$(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ est orthogonal à $(\vec{b}\wedge\vec{c})$ parce que $(\vec{b}\wedge\vec{c})$ est orthogonal à $\vec{b}$ et à $\vec{c}$.

Les deux vecteurs de l'énoncé, qu'on appelle $\vec{u}$ et $\vec{v}$, sont donc orthogonaux à $\vec{a}$ et à $(\vec{b}\wedge\vec{c})$. Si ces deux derniers ne sont pas colinéaires, il existe un seul plan P qui leur soit parallèle. Par conséquent $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux à ce plan, donc colinéaires. Si $\vec{a}$ et $(\vec{b}\wedge\vec{c})$ sont colinéaires, leur produit vectoriel (qu'on a appelé $\vec{u}$) est nul. Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires en ce sens que $\vec{u} = 0\cdot\vec{v}$.

c) Calculer $\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})$ et $(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ dans le cas $\vec{a}(2, 5, 1)$, $\vec{b}(1, -1, 1)$, $\vec{c}(0, 1, 2)$.

Les deux valent $(7, -5, 11)$.

Exercice 3. *Vecteurs de surface (sur 4 points)*

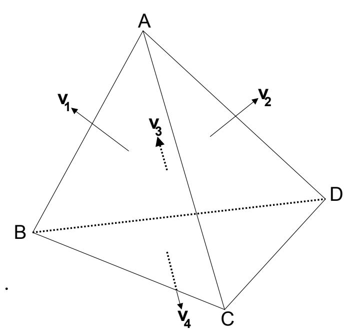
Étant donné un tétraèdre $ABCD$ on appellera vecteurs de surface les vecteurs suivants:

$\vec{v}_1$ est orthogonal au triangle ABC, $\vec{v}_2$ orthogonal au triangle ACD, $\vec{v}_3$ orthogonal au triangle ADB, $\vec{v}_4$ orthogonal au triangle BCD; de plus,

chacun de ces vecteurs est dirigé vers l'extérieur du tétraèdre, et

sa longueur est égale à l'aire du triangle auquel il est orthogonal.

Montrer que $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 = \vec{0}$.



Remarquons d'abord que $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\wedge\overrightarrow{BC}\right)$.

Si par exemple on met en facteur $\overrightarrow{AC}$ dans les deux premiers termes, on obtient $\overrightarrow{AC}\wedge(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$ (parce que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est égal à $-\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB}$). On obtient donc $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BD}$, qui se regroupe avec $\overrightarrow{BD}\wedge\overrightarrow{BC}$. On met en facteur $\overrightarrow{BD}$ dans la somme de ces deux termes, on obtient $\overrightarrow{BD}\wedge\overrightarrow{BA}$. Finalement on regroupe ce terme avec $\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AB}$ et on obtient $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AB}$ c'est à dire $\vec{0}$.

Exercice 4. *Plans (sur 4 points)*

Trouver les équations cartésiennes de tous les plans qui passent par les points $(1, 1, 0)$ et $(1, -1, 0)$, ainsi que celles de leur intersection.

$ax + cz - a = 0$ pour les plans et $\begin{cases} x = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ pour leur intersection.