Université de Provence 2008–2009

Corrigé de l'atelier

Lundi 8 décembre 2008

Intégrales et équations différentielles

Exercice 1. *Intégration par parties*

Pour tout entier naturel n on considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{Log}(1+x)\, dx$.

a) Calculer I_0.

$I_0 = \int_0^1 \mathrm{Log}(1+x)\, dx = \int_0^1 u'v\, dx$ avec $u' = 1$ et $v = \mathrm{Log}(1+x)$. Comme $u' = 1$ est la dérivée de $u = 1+x$ on a

$$I_0 = [uv]_0^1 - \int_0^1 uv'\, dx = [(1+x)\mathrm{Log}(1+x)]_0^1 - \int_0^1 1\, dx = 2\mathrm{Log}2 - 1.$$

b) Montrer la relation

$$I_n = \frac{\mathrm{Log}2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\, dx.$$

(Indication: intégrer par parties)

$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{Log}(1+x)\, dx = \int_0^1 u'v\, dx$ avec $u' = x^n$ et $v = \mathrm{Log}(1+x)$. Comme $u' = x^n$ est la dérivée de $u = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ on a

$$I_0 = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\mathrm{Log}(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{1}{1+x}\, dx = \frac{\mathrm{Log}2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\, dx.$$

c) En déduire l'encadrement

$$\frac{\mathrm{Log}2}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq I_n \leq \frac{\mathrm{Log}2}{n+1}.$$

(Indication: vérifier d'abord que la fonction $\dfrac{x^{n+1}}{1+x}$ est comprise entre 0 et x^{n+1}; son intégrale sera donc comprise entre celle de 0 et celle de x^{n+1})

Pour $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
1 \leq 1+x &\leq 2\\
1 \geq \frac{1}{1+x} &\geq \frac{1}{2}\\
1 \geq \frac{1}{1+x} &\geq 0\\
x^{n+1} \geq \frac{x^{n+1}}{1+x} &\geq 0\\
\int_0^1 x^{n+1}\, dx = \frac{1}{n+2} \geq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\, dx &\geq \int_0^1 0\, dx = 0\\
-\frac{1}{n+2} \leq -\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\, dx &\leq 0\\
-\frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\, dx &\leq 0\\
\frac{\mathrm{Log}2}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{\mathrm{Log}2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\, dx = I_n &\leq \frac{\mathrm{Log}2}{n+1}.
\end{aligned}$$

Exercice 2. *Changement de variable*

Calculer $(\tan(x))' \tan(x)\, dx$. *(Indication: on vérifiera d'abord que* $\tan^3(x) = \tan(x)(\tan(x))' - \tan(x)$*, puis on utilisera la linéarité de l'intégrale)*

On sait que la dérivée de $\tan x$ est $1+\tan^2 x$. On a donc $\tan^3(x) = \tan(x)(\tan(x))' - \tan(x)$ et par conséquent

$$\begin{aligned}\int \tan^3(x)\ dx &= \int \tan(x)(\tan(x))'\ dx - \int \tan(x)\ dx \\ &= \frac{\tan^2 x}{2} + \mathrm{Log}|\cos(x)| + \text{constante}.\end{aligned}$$

Exercice 3. *Équations différentielles*

Résoudre l'équation différentielle

$$y'(x) - y(x)\tan(x) = 1 - x\tan(x).$$

Sur quels intervalles sont définies les solutions?

On cherche d'abord les solutions de $y'(x) - y(x)\tan(x) = 0$ et on les appelle y_h (elles ne sont évidemment pas solutions de $y'(x) - y(x)\tan(x) = 1 - x\tan(x)$). D'après la formule du cours c'est

$$y_h = Ce^{-\int(-\tan(x))\ dx} = Ce^{-\mathrm{Log}|\cos(x)|} = \frac{C}{|\cos(x)|}.$$

On peut enlever la valeur absolue: sur un intervalle où le cosinus est négatif, il suffit de remplacer la constante C par la constante $-C$.

On cherche une solution particulière, qu'on appelle y_p. La fonction $y_p(x) = x$ est évidemment solution (de l'équation $y'(x) - y(x)\tan(x) = 1 - x\tan(x)$) puisque sa dérivée est 1. Maintenant on veut trouver toutes les solutions de $y'(x) - y(x)\tan(x) = 1 - x\tan(x)$, appelons les y_g (solution générale). La fonction $y_g - y_p$ est solution de $y'(x) - y(x)\tan(x) = 0$ puisque $(y_g - y_p)'(x) - (y_g - y_p)(x) = (1 - x\tan(x)) - (1 - x\tan(x)) = 0$. C'est donc une des solutions y_h qu'on a calculée c'est à dire il existe une constante C telle que $(y_g - y_p)(x) = \dfrac{C}{\cos(x)}$ d'où $\boxed{y_g(x) = x + \dfrac{C}{\cos(x)}}$.

Les solutions sont définies sur les intervalles où le cosinus ne s'annule pas, c'est à dire les intervalles $\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.