MATHEMATIQUES POUR PC 2
Corrigé du devoir 1 (géométrie et groupes)

I

Soient R la rotation de centre $\Omega_1(-1,1)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$, T la translation de vecteur $\overrightarrow{V}(1,-1)$ et H l'homothétie de centre $\Omega_2(1,1)$ et de rapport 3.

Solution : $R \circ H$ est la similitude directe de centre $\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 3, parce qu'en appelant z, z', z'' et z_1 les affixes respectives de $M, H(M), R(H(M))$ et du point fixe de $R \circ H$ on a

$z' - (1+i) = 3(z - (1+i)) \Rightarrow z' = 3z - 2(1+i)$,

$z'' - (-1+i) = e^{\frac{i\pi}{2}}(z' - (-1+i)) \Rightarrow z'' = iz' + (1-i)(-1+i) = 3iz + 2$, et

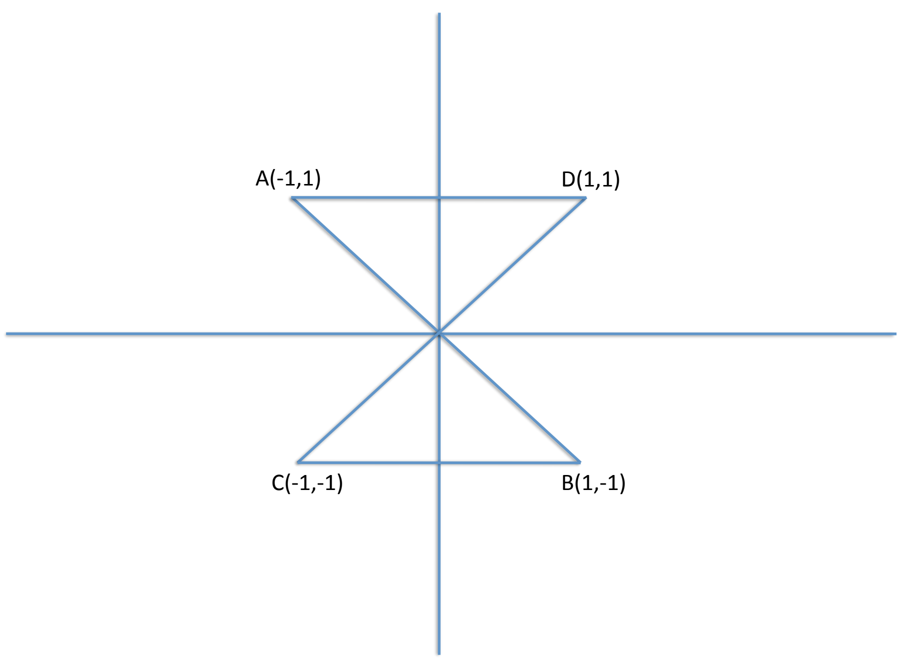
$z_1 = 3iz_1 + 2 \Rightarrow z_1 = \frac{2}{1-3i} = \frac{1}{5} + i\frac{3}{5}$.

$T \circ R$ est la rotation de centre $\Omega_2\,(0,1)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$T \circ H$ est l'homothétie de centre $\Omega_3\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ et de rapport 3.

II

On appellera $\mathcal{E}$ la figure suivante :



a) Déterminer l'ensemble des translations, rotations, homothéties et symétries axiales qui transforment l'ensemble des quatre points $\{A, B, C, D\}$ en lui-même (on n'utilisera pas l'expression analytique de ces transformations). Démontrer qu'il forme un groupe G, remplir sa table de composition, et le comparer au groupe des permutations de quatre éléments.

Solution : La rotation R_1 de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme $\begin{cases} A \text{ en } C \\ C \text{ en } B \\ B \text{ en } D \\ D \text{ en } A, \end{cases}$

elle transforme donc l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ en $\{C, B, D, A\}$ c'est à dire en $\{A, B, C, D\}$ (les ensembles ne sont pas ordonnés). C'est aussi le cas des composées successives de la rotation R_1 avec elle-même, c'est à dire la rotation R_2 d'angle π et la rotation R_3 d'angle $\frac{3\pi}{2}$. Si on compose quatre fois R_1 avec elle-même on obtient la rotation d'angle 2π c'est à dire l'identité, qu'on notera Id.

Dans le plan, l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ présente visiblement des symétries par rapport à chacun des deux axes, et par rapport à chacune de leurs bissectrices. On appellera respectivement S_x, S_y, S_1 et S_2 les symétries par rapport à l'axe des x, à l'axe des y, à la première bissectrice et à la deuxième bissectrice.

Vérifions qu'il n'y a pas d'autre similitude qui transforme $\{A, B, C, D\}$ en lui-même : toute translation transforme A en un point A' et B en un point B', le segment $[A'B']$ étant parallèle au segment $[AB]$ et de même longueur ; il est clair que A' et B' ne peuvent pas appartenir tous les deux à l'ensemble $\{A, B, C, D\}$, sauf s'il s'agit d'une translation de vecteur $\vec{0}$ c'est à dire de l'identité. De même une homothétie de rapport $r > 0$ multiplie les longueurs des segments par r, elle ne peut donc transformer $\{A, B, C, D\}$ en lui-même sauf si c'est l'homothétie de rapport 1 c'est à dire l'identité.

Soit G l'ensemble $\{Id, R_1, R_2, R_3, S_x, S_y, S_1, S_2\}$. Comme il n'y a pas d'autre similitude qui transforme $\{A, B, C, D\}$ en lui-même, quand on compose deux similitudes qui appartiennent à G on ne peut retomber que sur un élément de G ; pour savoir lequel, on teste sa valeur sur un des quatre points A, B, C, D.

On sait d'autre part que la composée d'une rotation d'angle θ avec une rotation d'angle θ' est une rotation d'angle $\theta + \theta'$; que la composée d'une symétrie avec elle-même est l'identité ; que la composée d'une rotation de centre O et d'une symétrie (par rapport à une droite qui passe par O) est une symétrie (parce qu'elle conserve les distances et inverse les angles) ; que la composée de deux symétries (par rapport à deux droites concourantes) est une rotation (parce qu'elle conserve les distances et les angles).

Ceci permet de remplir la table de composition :

$\circ$	Id	R_1	R_2	R_3	S_x	S_y	S_1	S_2
Id	Id	R_1	R_2	R_3	S_x	S_y	S_1	S_2
R_1	R_1	R_2	R_3	Id	S_1	S_2	S_y	S_x
R_2	R_2	R_3	Id	R_1	S_y	S_x	S_2	S_1
R_3	R_3	Id	R_1	R_2	S_2	S_1	S_x	S_y
S_x	S_x	S_2	S_y	S_1	Id	R_2	R_3	R_1
S_y	S_y	S_1	S_x	S_2	R_2	Id	R_1	R_3
S_1	S_1	S_x	S_2	S_y	R_1	R_3	Id	R_2
S_2	S_2	S_y	S_1	S_x	R_3	R_1	R_2	Id

Il y a quatre conditions à vérifier pour prouver que G est un groupe pour la loi de composition $\circ$:

• La composée de deux éléments de G appartient à G : c'est vrai puisque les 64 éléments de la table appartiennent à G.

• La loi $\circ$ est associative : on n'a pas à le démontrer, c'est fait dans le cours.

• Cette loi admet un élément neutre et cet élément neutre appartient à G : la transformation Id (c'est à dire l'identité) est élément neutre en ce sens que $T \circ Id = Id \circ T = T$ pour toute transformation T, et on constate que Id fait partie de l'ensemble G.

• Chaque élément de G admet un élément symétrique pour la loi $\circ$, et ce symétrique appartient à G : on voit sur la table de composition que R_1 et R_3 sont symétriques l'un de l'autre (parce que $R_1 \circ R_3 = R_3 \circ R_1 = Id$) et que chacune des transformation $Id, R_2, S_x, S_y, S_1, S_2$ est symétrique d'elle-même (c'est à dire quand on la compose avec elle-même elle donne l'identité).

Donc G est bien un groupe ; c'est aussi un sous-groupe du groupe des 24 permutations de l'ensemble $\{A, B, C, D\}$, c'est à dire des 24 bijections de $\{A, B, C, D\}$ dans lui-même.

b) Démontrer que l'ensemble H des translations, rotations, homothéties et symétries axiales qui conservent $\mathcal{E}$, c'est à dire qui transforment la figure $\mathcal{E}$ en elle-même, forme un sous-groupe de G.

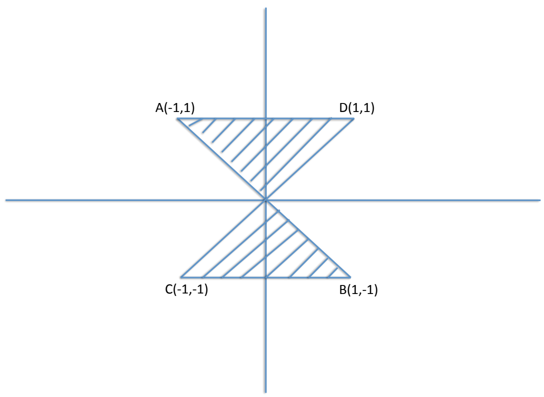
La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ ne transforme pas la figure $\mathcal{E}$ en elle-même parce qu'elle transforme le segment $[AD]$ en $[CA]$, qui ne fait visiblement pas partie de la figure. De même pour la rotation de centre O et d'angle $\frac{3\pi}{2}$ et pour les symétries per rapport aux bissectrices. Par contre les quatre autres éléments de G transforment la figure $\mathcal{E}$ en elle-même, on a donc $H = \{Id, R_\pi, S_1, S_2\}$.

$\circ$	Id	R_2	S_x	S_y
Id	Id	R_2	S_x	S_y
R_2	R_2	Id	S_y	S_x
S_x	S_x	S_y	Id	R_2
S_y	S_y	S_x	R_2	Id

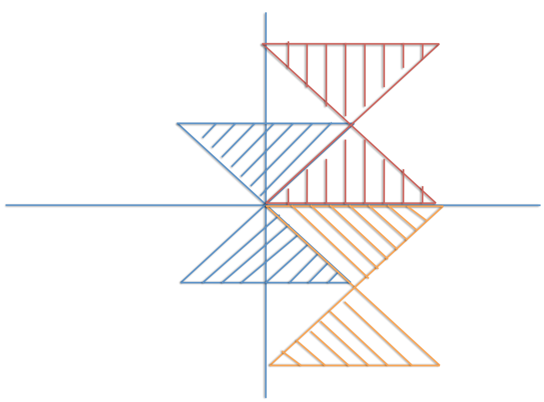
H est un sous-groupe du groupe G : on fait les mêmes vérifications qu'à la question a), en remplaçant G par H.

c) Recouvrir, sur un dessin, le plan par des translatées de la figure $\mathcal{E}$. On appellera $\mathcal{P}$ le pavage ainsi obtenu. Déterminer l'ensemble des translations, rotations, homothéties et symétries axiales qui conservent $\mathcal{P}$.

Le pavé central est constitué par l'intérieur de la figure $\mathcal{E}$:



La forme des pavés permet de les emboîter les uns dans les autres :



On peut ainsi recouvrir le plan par une infinité de pavés.

Une similitude conserve le pavage si elle transforme chaque pavé de $\mathcal{P}$ en un autre pavé de $\mathcal{P}$.

_ Les translations qui conservent $\mathcal{P}$ sont :

la translation de vecteur $(2n, 0)$ (pour chaque valeur de l'entier positif ou négatif n),

la translation de vecteur (m, m) (pour chaque valeur de l'entier positif ou négatif m),

et aussi la composée de ces deux translations, c'est à dire la translation de vecteur $(m + 2n, m)$.

Donc en résumé, les translations de vecteurs $(m + 2n, m)$ (et aucune autre translation) conservent $\mathcal{P}$.

_ Les autres similitudes qui conservent $\mathcal{P}$ sont :

les rotations d'angle π autour d'un point (m, n) à coordonnées entières,

les symétries par rapport à chaque axe d'équation $x = m$,

les symétries par rapport à chaque axe d'équation $y = n$ (m et n appartenant à $\mathbb{Z}$).