Université de Provence, 2008/2009

Licence mathématiques et informatique 1

Maths-géné 2

Corrigé de la feuille 4

Exercice 1 – Donner dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ les racines de X^3+1.

Solution : -1 est racine de X^3+1 (parce que $(-1)^3+1=0$) ; le polynôme X^3+1 est donc divisible par $X-(-1)=X+1$. Faisons cette division :

$$\begin{array}{c|l} X^3+1 & X+1 \\ \cline{2-2} -\left(X^3+X^2\right) & X^2-X+1 \\ =-X^2+1 & \\ -\left(-X^2-X\right) & \\ =X+1 & \\ -(X+1) & \\ =0 & \end{array}$$

On a donc $X^3+1=(X+1)\left(X^2-X+1\right)$. Le polynôme X^2-X+1 ayant un discriminant négatif, il n'a pas de racine réelle, et la seule racine réelle de X^3+1 est $\boxed{-1}$. Ses racines complexes sont $\boxed{-1}$ et les deux racines de X^2-X+1, c'est à dire $\boxed{\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}}$ et $\boxed{\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}}$.

Exercice 1 bis – Donner dans $\mathbb{C}[X]$ les racines de X^2+X+1.

Solution : $\boxed{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}}$ *et* $\boxed{\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$.

Exercice 2 – Effectuer la division euclidienne

(a) de $X^4-2X^3+4X^2-6X+8$ par $X-1$ dans $\mathbb{R}[X]$,

(b) de $4X^3+X^2$ par $X+1+i$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Solution :

$$\begin{array}{c|l} X^4-2X^3+4X^2-6X+8 & X-1 \\ \cline{2-2} -\left(X^4-X^3\right) & X^3-X^2+3X-3 \\ =-X^3+4X^2-6X+8 & \\ -\left(-X^3+X^2\right) & \\ =3X^2-6X+8 & \\ -\left(3X^2-3X\right) & \\ =-3X+8 & \\ -(-3X+3) & \\ =5 & \end{array}$$

ce qui fait $\boxed{X^4-2X^3+4X^2-6X+8=(X-1)\left(X^3-X^2+3X-3\right)+5}$.

$$\begin{array}{c|l} 4X^3+X^2 & X+1+i \\ \cline{2-2} -\left(4X^3+(4+4i)X^2\right) & 4X^2+(-3-4i)X+(-1+7i) \\ =(-3-4i)X^2 & \\ -\left((-3-4i)X^2+(-3-4i)(1+i)X\right) & \\ =(-1+7i)X & \\ -((-1+7i)X+(-1+7i)(1+i)) & \\ =8-6i & \end{array}$$

ce qui fait $\boxed{4X^3+X^2=(X+1+i)\left(4X^2+(-3-4i)X+(-1+7i)\right)+(8-6i)}$.

Exercice 3 - *(a) Montrer que $X^3+b^3+c^3-3bcX$ est divisible par $X+b+c$; en déduire une factorisation dans $\mathbb{R}$ de $a^3+b^3+c^3-3abc$.*

(b) Les racines cubiques de 1 dans $\mathbb{C}$ étant $1, j, j^2$, montrer que

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)\left(a+bj+cj^2\right)\left(a+bj^2+cj\right).$$

Solution :

$$\begin{array}{r|l}
X^3+b^3+c^3-3bcX & X+b+c \\ \cline{2-2}
-\left(X^3+(b+c)X^2\right) & X^2+(-b-c)X+(b^2-bc+c^2) \\
=(-b-c)X^2-3bcX+b^3+c^3 & \\
-\left((-b-c)X^2+(-b-c)(b+c)X\right) & \\
=\left(b^2-bc+c^2\right)X+b^3+c^3 & \\
-\left(\left(b^2-bc+c^2\right)X+\left(b^2-bc+c^2\right)(b+c)\right) & \\
=b^3+c^3-\left(b^2-bc+c^2\right)(b+c) &
\end{array}$$

Compte tenu que $b^3+c^3=\left(b^2-bc+c^2\right)(b+c)$, le dernier reste est nul ce qui fait

$$\boxed{X^3+b^3+c^3-3bcX=(X+b+c)\left(X^2-(b+c)X+\left(b^2-bc+c^2\right)\right)}.$$

En remplaçant X par a dans cette formule on obtient

$$\boxed{a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)}. \qquad (*)$$

Pour démontrer la dernière formule on va calculer le produit

$$\left(a+bj+cj^2\right)\left(a+bj^2+cj\right)=a^2+abj^2+acj+bja+bjbj^2+bjcj+cj^2a+cj^2bj^2+cj^2cj.$$

Comme j est racine cubique de 1 on a $j^3=1$ et par conséquent

$$\begin{array}{rcl}
\left(a+bj+cj^2\right)\left(a+bj^2+cj\right) & = & a^2+abj^2+acj+bja+b^2+bcj^2+acj^2+bcj+c^2 \\
& = & a^2+b^2+c^2+\left(j+j^2\right)(ab+ac+bc).
\end{array} \qquad (**)$$

De l'égalité $j^3=1$ on déduit (si on connaît les formules classiques) $0=j^3-1=(j-1)\left(j^2+j+1\right)$ d'où j^2+j+1 et par conséquent $j^2+j=-1$. En reportant dans $(**)$ on obtient

$$\left(a+bj+cj^2\right)\left(a+bj^2+cj\right)=a^2+b^2+c^2-(ab+ac+bc)$$

d'où

$$(a+b+c)\left(a+bj+cj^2\right)\left(a+bj^2+cj\right)=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-(ab+ac+bc)\right).$$

Compte tenu de $(*)$, la formule à démontrer s'en déduit.

Exercice 4 - *Factoriser X^8-1 dans respectivement $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$.*

Solution : On utilise la formule $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. On a donc

$$\begin{array}{rcl}
X^8-1 & = & \left(X^4-1\right)\left(X^4+1\right) \\
& = & \left(X^2-1\right)\left(X^2+1\right)\left(X^4+1\right) \\
& = & \boxed{(X-1)(X+1)\left(X^2+1\right)\left(X^4+1\right)}.
\end{array}$$

C'est la décomposition dans $\mathbb{Q}[X]$ parce que les coefficients des polynômes $X-1, X+1, X^2+1$ et X^4+1 sont des nombres rationnels (ils valent 1).

Pour avoir la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ on fait

$$\begin{array}{rcl}
X^4+1 & = & X^4+2X^2+1-2X^2 \\
& = & \left(X^2+1\right)^2-\left(X\sqrt{2}\right)^2 \\
& = & \left(X^2+1-X\sqrt{2}\right)\left(X^2+1+X\sqrt{2}\right).
\end{array}$$

On a donc

$$X^8-1=\boxed{(X-1)(X+1)\left(X^2+1\right)\left(X^2+1-X\sqrt{2}\right)\left(X^2+1+X\sqrt{2}\right)}.$$

C'est une décomposition en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, parce que chacun des trois derniers polynômes a un discriminant négatif et par conséquent ne peut pas être le produit de polynômes de degré 1.

Par contre dans $\mathbb{C}[X]$ ils sont produits de polynômes de degré 1 : par exemple X^2+1 a pour racines i et $-i$ et s'écrit donc $X^2+1=(X-i)(X+i)$. On calcule de même les racines des deux autres polynômes et on obtient

$$X^8-1=\boxed{(X-1)(X+1)(X-i)(X+i)\left(X-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right)\left(X-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)\left(X+\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right)\left(X+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)}.$$

Exercice 5 - *Factoriser dans respectivement $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :*

$$X^4+X^2+1,\quad X^8+X^4+1,\quad X^3+X^2+X+1.$$

Solution : On utilise la formule $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ pour obtenir les décompositions dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\begin{aligned} X^4+X^2+1 &= X^4+2X^2+1-X^2 \\ &= \left(X^2+1\right)^2-X^2 \\ &= \boxed{\left(X^2+1-X\right)\left(X^2+1+X\right)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X^8+X^4+1 &= X^8+2X^4+1-X^4 \\ &= \left(X^4+1\right)^2-X^4 \\ &= \left(X^4+1-X^2\right)\left(X^4+1+X^2\right) \\ &= \left(X^4+2X^2+1-3X^2\right)\left(X^4+2X^2+1-X^2\right) \\ &= \left(\left(X^2+1\right)^2-\left(X\sqrt{3}\right)^2\right)\left(\left(X^2+1\right)^2-X^2\right) \\ &= \boxed{\left(X^2+1-X\sqrt{3}\right)\left(X^2+1+X\sqrt{3}\right)\left(X^2+1-X\right)\left(X^2+1+X\right)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X^3+X^2+X+1 &= X^2(X+1)+(X+1) \\ &= \boxed{\left(X^2+1\right)(X+1)}. \end{aligned}$$

On calcule les racines de chacun des polynômes de degré 2 qui apparaissent dans ces décompositions, pour obtenir les décompositions dans $\mathbb{C}[X]$:

$$X^4+X^2+1=\boxed{\left(X-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)},$$

$$X^8+X^4+1=\left(X-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)\left(X-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)\left(X+\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)\left(X+\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)\left(X-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X+ 1+ \right.$$

$$X^3+X^2+X+1=\boxed{(X-i)(X+i)(X+1)}.$$

Exercice 6 - *Déterminer le PGCD de $A(X)=X^3-7X+6$ et $B(X)=X^4-5X^3+20X-16$. En déduire la factorisation de $A(X)$ et $B(X)$.*

Solution : "PGCD(A,B)", dans le cas des polynômes, signifie "polynôme de plus grand degré possible, qui soit un diviseur des polynômes A et B". Cependant si un polynôme D divise A et B et si C est une constante, alors le polynôme CD divise aussi A et B. On peut donc choisir cette constante de façon que le terme de plus haut degré (dans le polynôme CD) soit 1, et on dit alors que ce polynôme est normalisé. Ce qui permet de préciser la définition du PGCD :

Le PGCD de A et B est le polynôme normalisé, de plus grand degré possible, qui divise les polynômes A et B.

On fait les divisions euclidiennes successives

$A = BQ + R, \quad B = RQ_1 + R_1, \quad R = R_1Q_2 + R_2, \quad \ldots :$

$$\begin{array}{r|l} X^3 - 7X + 6 & X^4 - 5X^3 + 20X - 16 \\ \cline{2-2} & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} X^4 - 5X^3 + 20X - 16 & X^3 - 7X + 6 \\ \cline{2-2} -\left(X^4 - 7X^2 + 6X\right) & X - 5 \\ = -5X^3 + 7X^2 + 14X - 16 & \\ -\left(-5X^3 + 35X - 30\right) & \\ = 7X^2 - 21X + 14 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} X^3 - 7X + 6 & 7X^2 - 21X + 14 \\ \cline{2-2} -\left(X^3 - 3X^2 + 2X\right) & \frac{1}{7}X + \frac{3}{7} \\ = 3X^2 - 9X + 6 & \\ -\left(3X^2 - 9X + 6\right) & \\ = 0 & \end{array}$$

Le PGCD est égal au dernier reste non nul c'est à dire à $7X^2 - 21X + 14$. *En multipliant ce polynôme par* $\frac{1}{7}$ *on obtient* $\boxed{X^2 - 3X + 2}$, *qui est donc le PGCD normalisé de* A *et* B.

Factorisations : $X^3 - 7X + 6 = (X^2 - 3X + 2)(X + 3) = (X - 1)(X - 2)(X + 3)$ *et* $X^4 - 5X^3 + 20X - 16 = (X^2 - 3X + 2)(X^2 - 2X - 8) = (X - 1)(X - 2)(X + 2)(X - 4)$.

Exercice 7 - *Calculer le PGCD de* $X^5 - X^4 + 2X^3 + 1$ *et* $X^5 + X^4 + 2X^2 - 1$. *Calculer le PGCD de* $X^4 - 1$ *et* $B(X) = X^3 + X^2 + 2X + 2$.

Solution : Les divisions euclidiennes successives

$$X^5 - X^4 + 2X^3 + 1 = \left(X^5 + X^4 + 2X^2 - 1\right) \cdot 1 + \left(-2X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2\right)$$

$$X^5 + X^4 + 2X^2 - 1 = \left(-2X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2\right)\left(-\frac{1}{2}X - 1\right) + \left(X^3 + X + 1\right)$$

$$-2X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2 = \left(X^3 + X + 1\right)(-2X + 2) + 0$$

prouvent que le PGCD de $X^5 - X^4 + 2X^3 + 1$ *et* $X^5 + X^4 + 2X^2 - 1$ *est* $\boxed{X^3 + X + 1}$.

Les divisions euclidiennes successives

$$X^4 - 1 = \left(X^3 + X^2 + 2X + 2\right) \cdot (X - 1) + \left(-X^2 + 1\right)$$

$$X^3 + X^2 + 2X + 2 = \left(-X^2 + 1\right)(-X - 1) + (3X + 3)$$

$$-X^2 + 1 = (3X + 3)\left(-\frac{1}{3}X + \frac{1}{3}\right) + 0$$

prouvent que le PGCD de $X^4 - 1$ *et* $X^3 + X^2 + 2X + 2$ *est* $\boxed{X + 1}$.

Exercice 8 - *Soient* a, b *vérifiant les équations*

$$a + b = 5$$

$$ab = 6.$$

Montrer que a *et* b *sont racines d'un polynôme du second degré, et en déduire leurs valeurs.*

Solution : a *et* b *sont racines du polynôme* $P(X) = (X - a)(X - b)$ *puisque si on remplace* X *par* a *ou* b *dans ce polynôme on obtient* 0. *En développant on a*

$$P(X) = X^2 - aX - bX + ab = X^2 - (a + b)X + ab$$

et (en utilisant les hypothèses de l'énoncé) $P(X) = X^2 - 5X + 6$.

On calcule les racines de $X^2 - 5X + 6$ *: elles valent* 2 *et* 3. *Les valeurs de* a *et* b *sont donc* $\boxed{a = 2 \text{ et } b = 3}$ *ou* $\boxed{a = 3 \text{ et } b = 2}$.

Exercice 9 – *Soit $P(X)$ un polynôme de degré n, à coefficients réels.*

(a) Montrer que si α est racine de $P(X)$, son conjugué l'est aussi.

(b) Montrer que si m est l'ordre de multiplicité de la racine α et si m' est celui de $\overline{\alpha}$, alors $m' \geq m$.

(c) En déduire que l'ordre de multiplicité de α est égal à l'ordre de multiplicité de $\overline{\alpha}$.

(d) En déduire que tout polynôme à coefficients réels se décompose en produit de polynômes irréductibles de degré 1 ou 2, à coefficients réels.

Solution : (a) On donne d'abord un nom aux coefficients (réels) du polynôme :

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

d'où $P(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0$ et $\overline{P(\alpha)} = a_n \overline{\alpha}^n + a_{n-1}\overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + a_1\overline{\alpha} + a_0$ (parce que les coefficients α_k sont réels). Cette dernière expression est égale à $P(\overline{\alpha})$. Or $P(\alpha)$ est nul (d'après l'énoncé) ; son conjugué (dont on vient de voir que c'est $P(\overline{\alpha})$) est donc nul aussi, ce qui prouve que $\overline{\alpha}$ est racine du polynôme $P(X)$.

(b) Quand on dit que α est racine d'ordre m ça signifie que

$$P(X) = (X - \alpha)^m Q(X),$$

où $Q(X)$ est un polynôme qui n'admet pas α comme racine. Écrivons la même égalité en remplaçant X par un réel x :

$$P(x) = (x - \alpha)^m Q(x),$$

puis prenons le conjugué ; compte tenu que le conjugué d'une somme est la somme des conjugués, que le conjugué d'un produit est le produit des conjugués, et compte tenu que $P(x)$ est un nombre réel, on obtient

$$P(x) = (x - \overline{\alpha})^m \overline{Q(x)}. \qquad (***)$$

$Q(x)$ est un polynôme en x, notons le $b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ (les coefficients b_k peuvent être des nombres complexes) ; son conjugué est donc $\overline{b_m} x^m + \overline{b_{m-1}} x^{m-1} + \cdots + \overline{b_1} x + \overline{b_0}$ et c'est un polynôme en x ; la relation $(***)$ prouve alors que l'ordre de multiplicité de $\overline{\alpha}$ (en tant que racine de $P(X)$) est au moins égal à m.

(c) À la question b) on a prouvé que, quand on prend le conjugué d'une racine, on ne peut qu'augmenter son ordre de multiplicité ($m' \geq m$). Si on la conjugue une nouvelle fois, on augmente encore son ordre de multiplicité. Mais $\overline{\overline{\alpha}}$ c'est α, qui est racine d'ordre m ; on a donc $m \geq m' \geq m$, ce qui prouve que $m' = m$.

(d) D'après le théorème de D'Alembert tout polynôme se met sous la forme

$$P(X) = a(X - r_1)(X - r_2)\ldots(X - r_n)$$

(les r_k sont les racines réelles ou complexes de $P(X)$, et a est le coefficient du terme de plus haut degré).

Pour chacun des termes $X - r_k$ de ce produit, si r_k n'est pas réel on regroupe ce terme avec $(X - \overline{r_k})$ (compte tenu que (d'après la question a)) il existe h tel que $\overline{r_k} = r_h$). On obtient ainsi un polynôme du second degré, qui est

$$(X - r_k)(X - \overline{r_k}) = X^2 - (r_k + \overline{r_k})\, X + r_k \cdot \overline{r_k}.$$

Comme on sait (ou on vérifie facilement) que $r_k + \overline{r_k}$ et $r_k \cdot \overline{r_k}$ sont des nombres réels, ce polynôme du second degré est à coefficients réels.

Exercice 10 – *Déterminer a, b, c tels que le polynôme $X^4 + aX^2 + bX + c$ soit divisible par $X^2 + X + 1$ par les deux méthodes suivantes :*

(a) en écrivant que le quotient a la forme $X^2 + pX + q$ (justifier le degré et la forme normalisée de ce polynôme) ;

(b) en raisonnant sur les racines de $X^2 + X + 1$.

Solution : (a)

$$\begin{array}{c|l} X^4+aX^2+bX+c & X^2+X+1 \\ \cline{2-2} -\left(X^4+X^3+X^2\right) & X^2-X+a \\ =-X^3+(a-1)X^2+bX+c & \\ -\left(-X^3-X^2-X\right) & \\ =aX^2+(b+1)X+c & \\ -\left(aX^2+aX+a\right) & \\ =(b+1-a)X+(c-a) & \end{array}$$

Le quotient X^2-X+a est bien de degré 2, et il est normalisé puisque le coefficient de son terme de plus haut degré est 1.

D'après l'énoncé il faut faire en sorte que le reste soit nul ; il faut donc que $b+1-a$ et $c-a$ soient nuls, c'est à dire $\boxed{b=a-1}$ et $\boxed{c=a}$.

(b) Les racines de X^2+X+1 sont

$$j=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{et} \quad \overline{j}=j^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{4\pi}{3}}.$$

X^4+aX^2+bX+c est divisible par X^2+X+1, c'est à dire par $(X-j)\left(X-\overline{j}\right)$, si et seulement si il admet j et $\overline{j}$ comme racines, c'est à dire

$$\left\{\begin{array}{l} j^4+aj^2+bj+c=0 \\ \overline{j}^4+a\overline{j}^2+b\overline{j}+c=0. \end{array}\right.$$

On peut simplifier : j^4 est égal à $j^3\cdot j$ c'est à dire à j puisque $j^3=1$; son conjugué $\overline{j}^4$ est égal à $\overline{j}$. On a donc

$$\left\{\begin{array}{l} j+aj^2+bj+c=0 \\ \overline{j}+a\overline{j}^2+b\overline{j}+c=0. \end{array}\right.$$

Il suffit de faire la somme et la différence de ces deux équations puis de résoudre ; on obtient $\boxed{b=a-1}$ et $\boxed{c=a}$.

Exercice 11 - *(Oral Mines)*

Trouver a et b tels que le polynôme $P(X)=aX^{n+1}+bX^n+1$ admette 1 pour racine double. Déterminer alors le quotient de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-1)^2$.

Solution : Par théorème, $P(X)$ admet 1 pour racine double si et seulement si $P(1)=P'(1)=0$ et $P''(1)\neq 0$. On calcule ces trois expressions ; on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} a+b+1=0 \\ (n+1)a+nb=0 \\ (n+1)na+n(n-1)b\neq 0. \end{array}\right.$$

En résolvant on obtient $\boxed{a=n}$ et $\boxed{b=-n-1}$.

On obtient $\boxed{\dfrac{P(X)}{(X-1)^2}=nX^{n-1}+(n-1)X^{n-2}+\cdots+3X^2+2X+1}$.

Exercice 12 - *Effectuer les divisions suivant les puissances croissantes suivantes :*

$$\text{de} \quad 1-X^2 \quad \text{par} \quad 1-2X+X^2 \quad \text{(ordre 2)},$$

$$\text{de} \quad 2-3X^3+X^4 \quad \text{par} \quad 1+X+X^5 \quad \text{(ordre 6)},$$

$$\text{de} \quad 1-abX^2 \quad \text{par} \quad 1-(a+b)X+abX^2 \quad \text{(ordre } n\text{)}.$$

Solution : On fait de même que pour la division euclidienne, mais les termes de chaque polynôme sont rangés suivant les puissances croissantes :

$$\begin{array}{c|l} 1-X^2 & 1-2X+X^2 \\ \cline{2-2} -\left(1-2X+X^2\right) & 1+2X \\ =2X-2X^2 & \\ -\left(2X-4X^2+2X^3\right) & \\ =2X^2-2X^3 & \end{array}$$

On s'arrête là parce qu'on peut mettre X^2 en facteur dans le reste. Le calcul qu'on a fait prouve que

$$1-X^2=\left(1-2X+X^2\right)(1+2X)+X^2(2-2X).$$

On obtient de même

$$2-3X^3+X^4=\left(1+X+X^5\right)\left(2-2X+2X^2-5X^3+6X^4-8X^5\right)+X^6\left(10-2X+5X^2-6X^3+8X^4\right),$$

$$1-abX^2=\left(1-(a+b)X+abX^2\right)\left(1+(a+b)X+\left(a^2+b^2\right)X^2+\cdots+\left(a^{n-1}+b^{n-1}\right)X^{n-1}\right)+X^n\left(\left(a^n+b^n\right)-ab\left(a^{n-1}+b^{n-1}\right)X\right).$$