Université de Provence
Semestre 3

Licence SPC
Semaine de rentrée

MATHEMATIQUES POUR PC 3
Calcul de dérivées partielles

Rappel de cours Dans le cas d'une fonction de deux variables $f(x, y)$, on appelle "dérivées partielles de f" les dérivées suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \text{ dérivée de } f(x,y) \text{ par rapport à } x\text{, avec } y \text{ constante,}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \text{ dérivée de } f(x,y) \text{ par rapport à } y\text{, avec } x \text{ constante,}$$

voir l'exercice 1 pour les exemples.

On appelle gradient de f le couple $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

La formule de dérivation des fonctions composées s'applique quand, après avoir calculé les dérivées partielles de f, on remplace les variables x et y par des fonctions d'une autre variable, par exemple de t. Cette formule dit que la dérivée de $f\big(x(t), y(t)\big)$ par rapport à t est égale à $\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$.

Avec les notations de Leibniz cette formule équivaut à $df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy$.

Notons que pour les mathématiciens de l'époque de Leibniz, la notation df n'est pas une abstraction, c'est simplement $df = f(x + h, y + k) - f(x, y)$ où h et k ont été choisis suffisamment petits. Si x et y sont des fonctions de la variable t, posons par exemple $\varepsilon = 10^{-1000}$ et

$$df = f\big(x(t+\varepsilon), y(t+\varepsilon)\big) - f\big(x(t), y(t)\big), \quad dx = x(t+\varepsilon) - x(t) \quad \text{et} \quad dy = y(t+\varepsilon) - y(t).$$

Après avoir choisi des fonctions f, x et y pas trop compliquées, le calcul prouve que

$$df \simeq \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy$$

à quelque chose près, qui est au plus de l'ordre de 10^{-2000}, alors que df, dx et dy eux-mêmes sont de l'ordre de 10^{-1000}.

Attention, il ne faut pas remplacer $\frac{\partial f}{\partial x}$ par $\frac{f\big(x(t+\varepsilon), y(t+\varepsilon)\big) - f\big(x(t), y(t)\big)}{x(t+\varepsilon) - x(t)}$ mais par $\frac{f\big(x(t+\varepsilon), y(t)\big) - f\big(x(t), y(t)\big)}{x(t+\varepsilon) - x(t)}$; et il faut remplacer $\frac{\partial f}{\partial y}$ par $\frac{f\big(x(t), y(t+\varepsilon)\big) - f\big(x(t), y(t)\big)}{y(t+\varepsilon) - y(t)}$.

Exercice 1 Calculer les dérivées partielles de chacune des fonctions suivantes :

$$\sin(xy), \quad \ln(e^x + e^y), \quad \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos(xy)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy)$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{e^y}{e^x + e^y}$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Exercice 2 Déterminer le domaine de définition et les dérivées partielles de chacune des fonctions suivantes :

$$\frac{x}{y}, \quad |x|^y, \quad \sqrt{xy}.$$

Pour cette dernière fonction, déterminer également le domaine de définition de ses dérivées partielles.

$\frac{x}{y}$ est défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et a pour dérivées partielles $\frac{1}{y}$ et $-\frac{x}{y^2}$

$|x|^y = e^{y \ln |x|}$ est défini sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et a pour dérivées partielles $\frac{y}{x} e^{y \ln |x|} = \frac{y}{x}|x|^y$ et $(\ln |x|)e^{y \ln |x|} = (\ln |x|)|x|^y$.

$\sqrt{xy}$ est défini sur $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \cup (\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-)$ et a pour dérivées partielles $\frac{y}{2\sqrt{xy}}$ et $\frac{x}{2\sqrt{xy}}$, définies sur $(\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^*_+) \cup (\mathbb{R}^*_- \times \mathbb{R}^*_-)$.

***Exercice* 3** Soit $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Puis calculer les dérivées partielles de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, qu'on notera $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, et calculer celles de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, qu'on notera $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Que vaut le laplacien $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$?

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$.

Le laplacien de f est nul.

***Exercice* 4** Soit $g(x, y) = xy(x + y)$. Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x}, \dfrac{\partial g}{\partial y}$, puis calculer la dérivée de $g(t, e^t)$ par la formule de dérivation des fonctions composées ($\dfrac{dg}{dt} = \dfrac{\partial g}{\partial x} \cdot \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial g}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dt}$). Vérifier le résultat obtenu en calculant d'abord $g(t, e^t)$ en fonction de t puis en le dérivant.

$\frac{\partial g}{\partial x} = 2xy + y^2$ et $\frac{\partial g}{\partial y} = x^2 + 2xy$.

Pour calculer la dérivée de $g(t, e^t)$, on pose $x = t$ et $y = e^t$; on a donc $\frac{dx}{dt} = 1$ et $\frac{dy}{dt} = e^t$. Puis, appelons $g_1(t)$ la fonction $g(t, e^t)$. D'après la formule de dérivation des fonctions composées on a

$$\begin{aligned}
\frac{dg_1}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\
&= (2xy + y^2) \cdot 1 + (x^2 + 2xy) \cdot e^t \\
&= (2te^t + e^{2t}) \cdot 1 + (t^2 + 2te^t) \cdot e^t \\
&= 2te^t + e^{2t} + t^2 e^t + 2te^{2t}.
\end{aligned}$$

En dérivant directement la fonction $g(t, e^t) = te^t(t + e^t) = t^2 e^t + te^{2t}$ on obtient $2te^t + t^2 e^t + e^{2t} + 2te^{2t}$, qui est égal au résultat précédent.

***Exercice* 5** Une fonction h a pour gradient $\left(\dfrac{\partial h}{\partial x}, \dfrac{\partial h}{\partial y}\right) = (2xy + y^2, x^2 + 2xy)$, que vaut $h(x, y)$?

On sait que les fonctions qui ont pour dérivée (par rapport à x) $2xy + y^2$ sont les fonctions $x^2 y + xy^2 + C_1$, où C_1 est une constante c'est à dire ne dépend pas de x.

On sait que les fonctions qui ont pour dérivée (par rapport à y) $x^2 + 2xy$ sont les fonctions $x^2 y + xy^2 + C_2$, où C_2 est une constante c'est à dire ne dépend pas de y.

La fonction h qu'on cherche est forcément égale à ces deux fonctions, donc on a $C_1 = C_2$ ce qui fait que C_1 et C_2 ne dépendent ni de x ni de y, et $h(x, y) = x^2 y + xy^2 + C$ avec C constante.

***Exercice* 6** Soit φ une fonction de x et de y. On la considèrera aussi comme une fonction des coordonnées polaires r et θ (du point de coordonnées cartésiennes (x, y)) puisque $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$.

a) Par la formule de dérivation des fonctions composées, vérifier que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \cos \theta + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \sin \theta \\
\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot r \sin \theta + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot r \cos \theta.
\end{aligned}$$

On déduit des formules $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, que $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta$, $\frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta$, $\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta$ et $\frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta$.

Compte tenu que, pour cet exercice, la formule de dérivation des fonctions composées s'écrit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta},$$

on obtient les formules demandées.

b) Dériver par rapport à r l'expression de $\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}$ qu'on a obtenue à la question a) (on utilisera à nouveau la formule de dérivation des fonctions composées pour dériver $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$ par rapport à r). Quelle formule obtient-on pour $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}$?

En dérivant par rapport à r la première formule de la question a) on obtient

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \frac{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\partial r} \cdot \cos \theta + \frac{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\partial r} \cdot \sin \theta. \qquad (*)$$

Par la formule de dérivation des fonctions composées, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\partial r} &= \frac{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \\
&= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \cos \theta + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \cdot \sin \theta
\end{aligned}$$

(notons que $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$ n'est qu'une notation, qui signifie $\dfrac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\partial x}$, et que de même $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}$ signifie $\dfrac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\partial y}$).

On obtient par cette même formule

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\partial r} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\cdot\cos\theta + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\cdot\sin\theta$$

En reportant tout ça dans $(*)$ on a

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cdot\cos^2\theta + 2\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\cdot\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\cdot\sin^2\theta.$$

c) Obtenir de même une formule pour $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}$.

Quand on essaye de faire la même chose en dérivant par rapport à θ la deuxième formule de la question a), on s'aperçoit que cette dernière contient des $\sin\theta$ et $\cos\theta$ et par conséquent il ne faut pas oublier de les dériver. De plus il apparaîtra des r^2 dans les autres termes, puisqu'un nouvel r apparaît quand on dérive x et y par rapport à θ. On obtient donc, par le même calcul qu'à la question b),

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cdot(-r\sin\theta)^2 - 2\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\cdot r^2\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\cdot(r\cos\theta)^2 - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot r\cos\theta - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot r\sin\theta \\ &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cdot r^2\sin^2\theta - 2\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\cdot r^2\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\cdot r^2\cos^2\theta - \frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot r.\end{aligned}$$

d) En déduire l'expression du laplacien de φ (c'est à dire de $\Delta\varphi = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$) en fonction des dérivées partielles de φ par rapport aux coordonnées polaires.

On peut mettre r^2 en facteur dans l'expression obtenue à la question c). En lui ajoutant l'expression obtenue à la question b) et en remplaçant les $\cos^2\theta + \sin^2\theta$ par 1 on obtient

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$

On réécrit cette formule en mettant les x et les y à gauche, et les r et les θ à droite :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$