

Exercice 1

Soit pour tout $A \subset \mathbb{R}$ la proposition

$$\mathcal{F}(A) : \forall x \in A^c, \exists \varepsilon > 0,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap A = \emptyset.$$

1. Nier cette proposition.

Réponse : $\exists x \in A^c, \forall \varepsilon > 0,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap A \neq \emptyset.$

2. (a) Pour $A =]0, 1[$, la proposition est-elle vraie ou fausse ?

Réponse : Elle est fausse puisqu'il existe un x dans A^c (par exemple $x = 0$) pour lequel l'intersection $]0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon[\cap A$ est non vide quel que soit $\varepsilon > 0$.

2. (b) Pour $A = \mathbb{N}$, la proposition est-elle vraie ou fausse ?

Réponse : Elle est vraie : tout $x \in \mathbb{N}^c$ est strictement compris entre sa partie entière, qu'on note $E(x)$, et l'entier $E(x) + 1$; on peut choisir $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $x - \varepsilon$ et $x + \varepsilon$ soient aussi strictement compris entre $E(x)$ et $E(x) + 1$; et par conséquent $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap \mathbb{N} = \emptyset.$

3. (a) Montrer que pour A et B deux sous ensembles de $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}(A)$ et $\mathcal{F}(B) \Rightarrow \mathcal{F}(A \cup B)$.

Réponse : On suppose $\mathcal{F}(A)$ et $\mathcal{F}(B)$ vrais, et on veut démontrer que $\mathcal{F}(A \cup B)$ est vrai, c'est à dire qu'il existe autour de chaque $x \in (A \cup B)^c$ un intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ qui ne coupe pas $A \cup B$. Or comme x n'appartient ni à A ni à B , il en existe un qui ne coupe pas A et un autre qui ne coupe pas B :

$$]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap A = \emptyset \text{ et }]x - \varepsilon', x + \varepsilon'[\cap B = \emptyset.$$

Soit $]x - \varepsilon'', x + \varepsilon''[$ le plus petit de ces deux intervalles. Il ne coupe ni A ni B , par conséquent

$$]x - \varepsilon'', x + \varepsilon''[\cap (A \cup B) = \emptyset.$$

On a démontré que $\mathcal{F}(A \cup B)$ est vrai.

3. (b) Montrer que pour A et B deux sous ensembles de $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}(A)$ et $\mathcal{F}(B) \Rightarrow \mathcal{F}(A \cap B)$.

Réponse : On suppose $\mathcal{F}(A)$ et $\mathcal{F}(B)$ vrais, et on veut démontrer que $\mathcal{F}(A \cap B)$ est vrai, c'est à dire qu'il existe autour de chaque $x \in (A \cap B)^c$ un intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ qui ne coupe pas $A \cap B$. Suivant que x n'appartient pas à A , ou n'appartient pas à B , il existera un tel intervalle qui ne coupe pas A ou qui ne coupe pas B :

$$\exists \varepsilon > 0,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap A = \emptyset \text{ ou }]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap B = \emptyset.$$

Mais $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap (A \cap B)$ est inclus dans chacune de ces deux intersections, et par conséquent il est vide dans les deux cas. On a démontré que $\mathcal{F}(A \cup B)$ est vrai.

Exercice 2

Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la relation binaire notée $\leq$ par :

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x).$$

1. (a) Montrer que cette relation est un ordre.

Réponse : Cette relation est réflexive ($f(x) \leq f(x)$ pour tout x) ;
 elle est antisymétrique (si $f(x) \leq g(x)$ pour tout x et $g(x) \leq f(x)$ pour tout x alors $f(x) = g(x)$ pour tout x c'est à dire $f = g$) ;
 elle est transitive (si $f(x) \leq g(x)$ pour tout x et $g(x) \leq h(x)$ pour tout x alors $f(x) \leq h(x)$ pour tout x).

1. (b) Cet ordre est-il total ?

Réponse : Non, par exemple on n'a pas $\cos \leq \sin$ et on n'a pas $\sin \leq \cos$.

2. En notant $\mathbf{0}$ l'application définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \mathbf{0}(x) = 0$, donner la propriété vérifiée par f si $f \neq \mathbf{0}$.

Réponse : C'est : $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.

3. On définit la relation binaire $<$ sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par :

$$f < g \Leftrightarrow f \leq g \text{ et } f \neq g.$$

Donner la propriété vérifiée par le couple d'applications f, g (sur ses valeurs) si $f < g$.

Réponse : C'est : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x)$ et $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq g(x)$.

4. Pour tout couple d'applications f, g on définit l'application $\sup(f, g)$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\sup(f, g))(x) = \sup\{f(x), g(x)\}.$$

Montrer que $\sup(f, g)$ est un majorant de l'ensemble $\{f, g\}$ mais que si $f \neq g$, ce n'est pas un maximum de cet ensemble (il fallait plutôt lire : si $f \not\leq g$ et $g \not\leq f$, alors $\sup(f, g)$ n'est pas le plus grand élément de l'ensemble $\{f, g\}$).

Réponse : $\sup(f, g)$ majore $\{f, g\}$ puisque $(\sup(f, g))(x) = \sup\{f(x), g(x)\}$ est $\geq f(x)$ et $\geq g(x)$ pour tout x . Supposons $f \not\leq g$ et $g \not\leq f$. Le plus grand élément de l'ensemble $\{f, g\}$, s'il existe, est obligatoirement élément de l'ensemble $\{f, g\}$ c'est à dire il est f ou g ; il est aussi $\geq f$ et $\geq g$, ce qui contredit l'hypothèse ($f \not\leq g$ et $g \not\leq f$).

Notes :

BARENGO	Vincent	8
BIANCHI	Jérôme	12,5
BOEUF	Sébastien	10
BRETOS	Rémi	11
BRUGUIÈRES	Guillaume	17
CIPRIANI	Thomas	9
FABIEN	Quentin	15
FAURE	Lauren	17
GIRAUD	Nathalie	8
GUILLAUD	William	8
JOSEPH	Damien	12
LOGIER	Alexia	8,5
MERCIER	Jérémy	12
PAUREAU	Vincent	11
SORET	Rémi	10
TELINGE	Florent	18
TERNON	Jean Baptiste	6
TOULET	Anaïs	16
VALENTIN	Romain	10

(Ce DM, comme le partiel en l'état actuel du sujet, est davantage un exercice de compréhension de l'énoncé qu'un exercice de math)