

MATHEMATIQUES POUR PC 2
Corrigé de la planche 5

Exercice 1 a) Représenter sur un même tableau les variations des fonctions $x(t) = t^2 + t^4$ et $y(t) = t^3 - 3t$ pour $t \in [0, +\infty[$.

Réponse : Les deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ et ont pour dérivées $x'(t) = 2t + 4t^3 = 2t(1 + 2t^2)$ et $y'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t^2 - 1)$.

t	0		1		$+\infty$
x'	0	+	6	+	
y'	-3	-	0	+	
x	0		2		$+\infty$
y	0		-2		$+\infty$

b) Vérifier que le point de coordonnées $(x(-t), y(-t))$ est symétrique du point de coordonnées $(x(t), y(t))$ par rapport à l'axe des x .

Réponse : Le point de coordonnées $(x(-t), y(-t))$ a même abscisse que le point de coordonnées $(x(t), y(t))$ puisque $x(-t) = (-t)^2 + (-t)^4 = t^2 + t^4 = x(t)$. Ces deux points ont des ordonnées opposées : $y(-t) = (-t)^3 - 3(-t) = -t^3 + 3t = -y(t)$. Ils sont donc symétriques par rapport à l'axe des x .

c) Soit (C) la courbe d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + t^4 \\ y(t) = t^3 - 3t \end{cases}$$

Quelle est la pente de la tangente au point $M_0(x(0), y(0))$ et au point $M_1(x(1), y(1))$? Quelles sont les intersections de la courbe (C) avec l'axe des x ? Placer ces points ainsi que le point $M_2(x(2), y(2))$, tracer la courbe pour $t \in [0, +\infty[$ et la compléter par symétrie par rapport à l'axe des x .

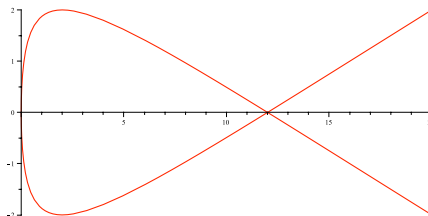
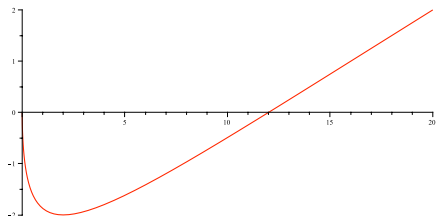
Réponse : La pente de la tangente, dans le cas d'une courbe paramétrée, est égale à $\frac{y'}{x'}$, ou à $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y'(t)}{x'(t)}$ si $\frac{y'}{x'}$ n'est pas défini au point considéré.

Par exemple la pente de la tangente au temps $t = 0^+$ est $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\infty$ (d'après le tableau de variations).

Au temps $t = 1$ c'est $\frac{y'(1)}{x'(1)} = \frac{0}{6} = 0$.

Les intersections de la courbe avec l'axe des x ont une ordonnée nulle, on a donc $t^3 - 3t = 0$ c'est à dire $t(t^2 - 3) = 0$ ce qui fait $t = 0$ ou $\pm\sqrt{3}$. On calcule $x(0) = 0$ et $x(\pm\sqrt{3}) = 12$, les intersections sont donc les points $(0, 0)$ et $(12, 0)$.

On place les points $(x, y) = (0, 0)$ (position du point au temps $t = 0$), $(x, y) = (2, -2)$ (au temps $t = 1$), $(x, y) = (12, 0)$ (au temps $t = \sqrt{3}$) et $(x, y) = (20, 2)$ (au temps $t = 2$) puis on les joint par une courbe, puis on la symétrise par rapport à l'axe des x :



Exercice 2 a) Représenter sur un même tableau les variations des fonctions $x(t) = \cos t$ et $y(t) = \sin(2t)$ pour $t \in [0, \pi]$.

Réponse : Les deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ et ont pour dérivées $x'(t) = -\sin t$ et $y'(t) = 2 \cos(2t)$.

t	0		$\pi/4$		$3\pi/4$		π
x'	0	-	$-\sqrt{2}/2$	-	$-\sqrt{2}/2$	-	0
y'	2	+	0	-	0	+	2
x	1		$\sqrt{2}/2$		$-\sqrt{2}/2$		-1
y	0		1		-1		0

b) Vérifier que le point de coordonnées $(x(-t), y(-t))$ est symétrique du point de coordonnées $(x(t), y(t))$ par rapport à l'axe des x .

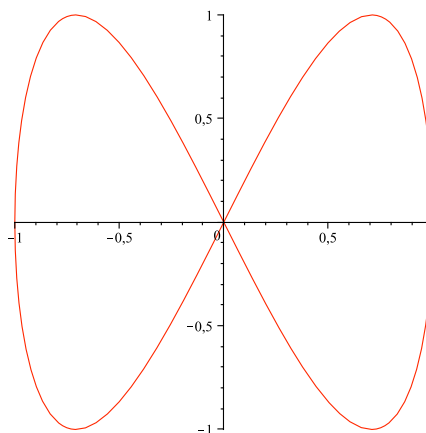
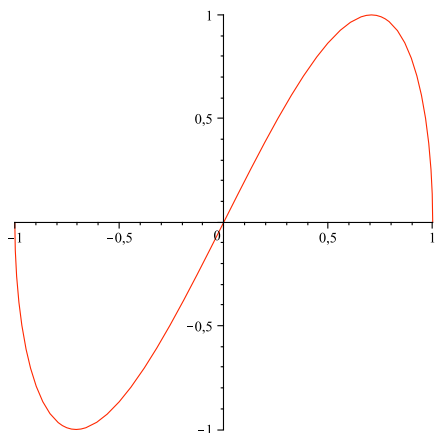
Réponse : Le point de coordonnées $(x(-t), y(-t))$ a même abscisse que le point de coordonnées $(x(t), y(t))$ puisque $x(-t) = \cos(-t) = \cos t = x(t)$. Ces deux points ont des ordonnées opposées : $y(-t) = \sin(-2t) = -\sin(2t) = -y(t)$. Ils sont donc symétriques par rapport à l'axe des x .

c) Soit (C) la courbe d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$$

Quelle est la pente de la tangente au point $M(x(t), y(t))$ pour $t = 0$, $t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{3\pi}{4}$ et $t = \pi$? Placer ces quatre points et les quatre tangentes correspondantes, puis tracer la courbe pour $t \in [0, \pi]$ et la compléter par symétrie par rapport à l'axe des x .

Réponse : La pente de la tangente étant $\frac{y'}{x'}$ (dans le cas d'une courbe paramétrée), elle vaut $-\infty$ en $t = 0^+$ ou π^- et elle vaut 0 en $t = \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4}$ (d'après le tableau de variations).



Exercice 3 Le Folium de Descartes est la courbe définie paramétriquement par les équations

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

a) Vérifier que le point $M'\left(x\left(\frac{1}{t}\right), y\left(\frac{1}{t}\right)\right)$ est symétrique du point $M(x(t), y(t))$ par rapport à la bissectrice principale des deux axes.

Réponse : L'abscisse de M' est l'ordonnée de M et vice versa parce que

$$x\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^3}} = \frac{t^2}{t^3+1} = y(t) \quad \text{et} \quad y\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^3}} = \frac{t}{t^3+1} = x(t).$$

Ces points sont donc symétriques par rapport à la bissectrice.

b) Représenter sur un même tableau les variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ pour $t \in]-1, 1]$.

Réponse : Les deux fonctions sont définies sur $] -\infty, -1[\cup] -1, +\infty[$ et ont pour dérivées $x'(t) = \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}$ et

$$y'(t) = \frac{2t-t^4}{(1+t^3)^2} = \frac{t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}.$$

t	-1	0	$1/\sqrt[3]{2}$			1	
x'		+	1	+	0	-	-1/4
y'		-	0	+	$2/(3\sqrt[3]{2})$	+	1/4
x			0		$2/(3\sqrt[3]{2})$		$1/2$
y					$2/(3\sqrt[3]{4})$		$1/2$

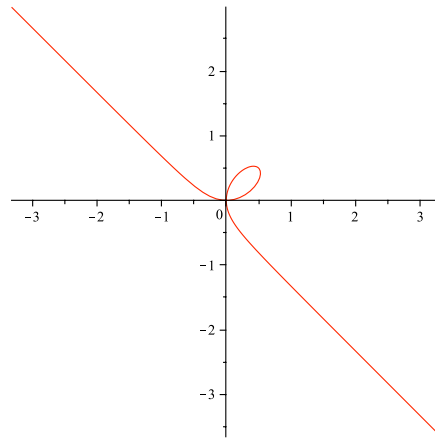
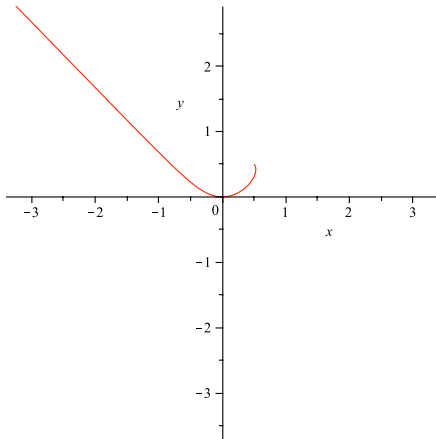
c) Déterminer $\lim_{t \rightarrow -1} x(t)$, $\lim_{t \rightarrow -1} y(t)$ et $\lim_{t \rightarrow -1} (x(t) + y(t))$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

Réponse : Quand t tend vers $(-1)^+$, $1+t^3$ tend vers 0^+ donc $x(t) = \frac{t}{1+t^3}$ tend vers $-\infty$ et $y(t) = \frac{t^2}{1+t^3}$ vers $+\infty$, ce qui fait que la courbe a une branche infinie dans le quart de plan supérieur gauche. Cette branche est asymptote à la droite d'équation $x + y = -\frac{1}{3}$ parce que, quand t tend vers $(-1)^+$,

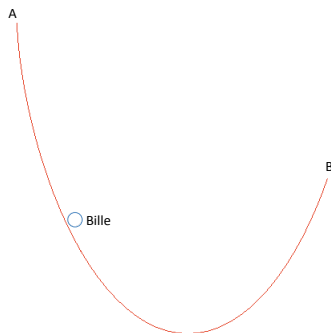
$$x(t) + y(t) = \frac{t+t^2}{1+t^3} = \frac{t(1+t)}{(1+t)(1-t+t^2)} = \frac{t}{1-t+t^2} \rightarrow -\frac{1}{3}.$$

d) Tracer la courbe paramétrée par $x(t)$ et $y(t)$ pour $t \in]-1, 1]$, puis la compléter par symétrie par rapport à la bissectrice.

Réponse :



Exercice 4 On sait que le plus court chemin pour aller d'un point A à un point B est la ligne droite. Mais ce n'est pas le chemin le plus rapide pour une bille qui roulerait sans frottement de A vers B :



On démontre (voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Courbe_brachistochrone) que la forme de la courbe qui permet à la bille d'atteindre B le plus rapidement possible est donnée par les équations paramétriques

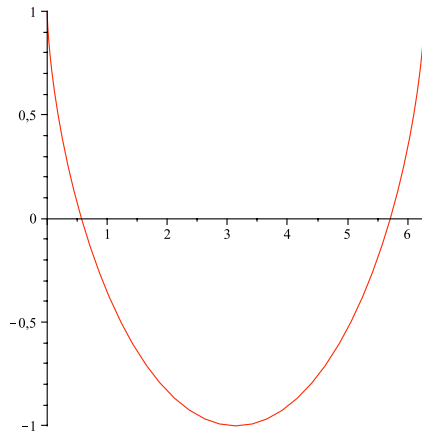
$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = \cos t. \end{cases}$$

Faire le tableau de variations et tracer la courbe pour $t \in [0, 2\pi]$ (les pentes des tangentes aux bornes sont $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y'(t)}{x'(t)}$ et $\lim_{t \rightarrow 2\pi} \frac{y'(t)}{x'(t)}$).

Réponse : Compte tenu que $x'(t) = 1 - \cos t$ et $y'(t) = -\sin t$ on obtient le tableau de variations suivant :

t	0		π		2π
x'	0	+	2	+	0
y'	0	-	0	+	0
x	0		π		2π
y	1		-1		1

et la courbe décrite par le point $(x(t), y(t))$:



Vérifions la verticalité de la pente de la tangente aux points $(x(0), y(0))$ et $(x(2\pi), y(2\pi))$:

$$\begin{aligned} \frac{y'(t)}{x'(t)} &= -\frac{\sin t}{1 - \cos t} \\ &= -\frac{\sin t(1 + \cos t)}{(1 - \cos t)(1 + \cos t)} \\ &= -\frac{\sin t(1 + \cos t)}{1 - \cos^2 t} \\ &= -\frac{\sin t(1 + \cos t)}{\sin^2 t} \\ &= -\frac{1 + \cos t}{\sin t} \\ &\rightarrow -\infty \quad (t \rightarrow 0^+) \\ &\rightarrow +\infty \quad (t \rightarrow (2\pi)^-). \end{aligned}$$

Remarques : La bille part avec une vitesse nulle (par hypothèse) et arrive avec une vitesse nulle parce que, dans le cas qu'on a traité, le point B est à la même hauteur que le point de départ A . On a obtenu la forme de la courbe mais pas la valeur du rapport $\frac{AB}{h}$ (c'est à dire la longueur du segment $[AB]$ divisé par la hauteur de la courbe) ; parmi les valeurs possibles de $h \in]0, +\infty[$ il en existe une qui permet à la bille d'atteindre plus rapidement le point B . D'autre part le paramétrage $(x(t), y(t))$ donne la trajectoire de la bille mais donne aussi sa position à chaque instant t .