Université de Provence	Licence Mathématiques-Informatique
UE1-4 : Algèbre et analyse élémentaires	
Corrigé du partiel	
2007-2008	31 octobre 2007

Question de cours

Soit f une fonction d'un ensemble E vers un ensemble F. Rappeler la définition de f injective.
Réponse : $\forall x, y \in E,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$

2. Quelle est la propriété vérifiée par f si f n'est pas injective ?
Réponse : $\exists x, y \in E,\ f(x) = f(y) \wedge x = y.$

Exercice 1

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse. Si elles sont fausses, donner leur négation.
1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x^2 \geq y$.
2. $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq y$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x^2 + y \leq 0$.
4. $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + y \leq 0$.
Réponse :
1. Elle est vraie, on peut prendre $y = x^2$, ou $y = 0$.
2. Elle est vraie, il existe un réel y (par exemple $y = 0$) qui soit inférieur ou égal à tous les x^2.
3. Elle est vraie, on peut prendre $y = -x^2$.
4. Elle est fausse ; vérifions que sa négation :
$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + y > 0$
est vraie : pour tout y il existe un x, par exemple $x = y - 1$, pour lequel $x^2 + y = y^2 - y + 1$ est strictement positif, compte tenu que ce polynôme a un discriminant strictement négatif.

Exercice 2

Soit pour tout $A \subset \mathbb{R}$ la proposition

$$\mathcal{G}(A) :\ \forall x \in A,\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall y \in \mathbb{R},\ (y \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\Rightarrow y \in A).$$

1. Nier cette proposition.
Réponse : $\exists x \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in \mathbb{R},\ \big((y \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[) \wedge (y \notin A)\big).$

2. (a) Pour $A =]0,1[$, la proposition est-elle vraie ou fausse ?
Réponse : Elle est vraie puisque pour tout $x \in]0,1[$ on peut choisir pour ε la distance de x à l'entier le plus proche, c'est à dire $\varepsilon = x$ si $x \leq \frac{1}{2}$ et $\varepsilon = 1 - x$ si $x \geq \frac{1}{2}$, de sorte que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ soit inclus dans A.

2. (b) Pour $A = \mathbb{N}$, la proposition est-elle vraie ou fausse ?
Réponse : Elle est fausse : pour $x \in \mathbb{N}$, $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ n'est pas inclus dans $\mathbb{N}$.

3. (a) Montrer que pour A et B deux sous ensembles de $\mathbb{R}$, $\mathcal{G}(A)$ et $\mathcal{G}(B) \Rightarrow \mathcal{G}(A \cup B)$.
Réponse : On suppose $\mathcal{G}(A)$ et $\mathcal{G}(B)$ vrais, et on veut démontrer que $\mathcal{G}(A \cup B)$ est vrai, c'est à dire qu'il existe autour de chaque $x \in A \cup B$ un intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ qui soit inclus dans $A \cup B$. On prend celui qui est inclus dans A (si $x \in A$) ou celui qui est inclus dans B (si $x \in B$), lesquels existent puisque $\mathcal{G}(A)$ et $\mathcal{G}(B)$ sont vrais.

3. (b) Montrer que pour A et B deux sous ensembles de $\mathbb{R}$, $\mathcal{G}(A)$ et $\mathcal{G}(B) \Rightarrow \mathcal{G}(A \cap B)$.
Réponse : On suppose $\mathcal{G}(A)$ et $\mathcal{G}(B)$ vrais, et on veut démontrer que $\mathcal{G}(A \cap B)$ est vrai, c'est à dire qu'il existe autour de chaque $x \in A \cap B$ un intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ qui soit inclus dans $A \cap B$. On prend l'intersection de l'intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ qui est inclus dans A et de l'intervalle $]x - \varepsilon', x + \varepsilon'[$ qui est inclus dans B ; cette intersection est un intervalle $]x - \varepsilon'', x + \varepsilon''[$ qui est inclus dans $A \cap B$.

Exercice 3

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{S}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{S}y \Leftrightarrow f(x) \geq f(y).$$

1. (a) Montrer que l'injectivité de f est la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{S}$ soit un ordre sur $\mathbb{R}$.
Réponse : Cette relation est réflexive : $x\mathcal{S}x$ c'est à dire $f(x) \leq f(x)$ est vrai.

Elle est antisymétrique si et seulement si f est injective : "$x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}x$" équivaut à "$f(x) \geq f(y)$ et $f(y) \geq f(x)$" c'est à dire à $f(x) = f(y)$, et cette égalité n'implique $x = y$ que dans le cas ou f est injective.

elle est transitive : "$x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}z$", c'est à dire à "$f(x) \geq f(y)$ et $f(y) \geq f(z)$", implique $f(x) \geq f(z)$ c'est à dire $x\mathcal{S}z$.

1. (b) Cet ordre est-il total ?
Réponse : Cet ordre est total : étant donné deux réels x et y, on a $f(x) \geq f(y)$ ou $f(y) \geq f(x)$ c'est à dire $x\mathcal{S}y$ ou $y\mathcal{S}x$.

2. On suppose que f est une fonction strictement croissante.
(a) Justifier que la condition pour avoir une relation d'ordre est vérifiée.
Réponse : Vérifions que f est injective. Si deux réels x et y vérifient $f(x) = f(y)$, alors on ne peut pas avoir $x < y$ (ça impliquerait $f(x) < f(y)$), ni $y < x$ (ça impliquerait $f(y) < f(x)$), on a donc $x = y$.

(b) Montrer que $\mathcal{S}$ est l'ordre habituel, c'est à dire que

$$x\mathcal{S}y \Leftrightarrow x \geq y.$$

Réponse : Si deux réels x et y vérifient $x\mathcal{S}y$, on a $f(x) \geq f(y)$, on ne peut pas avoir $x < y$ (auquel cas on en déduirait $f(x) < f(y)$), et on a donc $x \geq y$. Réciproquement soient deux réels x et y tels que $x \geq y$. Alors l'application strictement croissante f vérifie $f(x) > f(y)$ si $x > y$, et elle vérifie évidemment $f(x) = f(y)$ si $x = y$. On a donc bien $x\mathcal{S}y$ dans les deux cas.

Les notes seront calculées après harmonisation entre les groupes de TD.

Le classement est :

FAURE Lauren
BRUGUIÈRES Guillaume
TOULET Anaïs
PAUREAU Vincent
JOSEPH Damien
BIANCHI Jérome
VALENTIN Romain
TELINGE Florent
BRETOS Rémi
MERCIER Jérémy
TERNON Jean Baptiste
LOGIER Alexia
FABIEN Quentin
BARENGO Vincent
RICHAUD Faustine
BOEUF Sébastien
SORET Rémi
GIRAUD Nathalie
GUILLAUD William
CIPRIANI Thomas