Corrigé des exercices (espaces vectoriels, bases)

Exercice 25.1 *Vérifier que le système (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$: $u=(0,1,1)$, $v=(1,0,1)$, $w=(0,0,1)$ de deux méthodes différentes (famille libre, famille génératrice ...) on verra encore d'autres méthodes plus tard ... Décomposer le vecteur $U=(2,3,-1)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et dans cette base.*

Réponse: **a)** Pour savoir si la famille (u,v,w) est libre, on cherche les α,β,γ tels que:

$$\alpha u+\beta v+\gamma w=0 \qquad (*)$$

(autrement dit on cherche les coordonnées du vecteur $0=(0,0,0)$ dans la présumée base (u,v,w)). Si on trouve que seuls $\alpha=\beta=\gamma=0$ sont solutions, la famille (u,v,w) est libre. Après calculs, l'équation $(*)$ est équivalente au système de trois équations:

$$\begin{cases} \beta=0 \\ \alpha=0 \\ \alpha+\beta+\gamma=0 \end{cases}$$

dont la seule solution est $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=-\alpha-\beta=0$, et donc la famille (u,v,w) est libre.
D'autre part (u,v,w) est une base parce que, d'après le théorème de la dimension, toute famille libre de n vecteurs (dans un espace vectoriel de dimension n) est aussi une base (c'est à dire est libre et génératrice).

b) Autre méthode: pour savoir si la famille (u,v,w) est génératrice, on cherche les α,β,γ tels que le vecteur quelconque (x,y,z) s'écrive:

$$(x,y,z)=\alpha u+\beta v+\gamma w \qquad (**)$$

(autrement dit on cherche les coordonnées de tout vecteur (x,y,z) dans la présumée base (u,v,w)). Si on trouve des valeurs de α, β et γ qui satisfont les trois équations, la famille (u,v,w) est génératrice. Après calculs, l'équation $(**)$ est équivalente au système de trois équations:

$$\begin{cases} \beta=x \\ \alpha=y \\ \alpha+\beta+\gamma=z \end{cases}$$

dont la solution est $\boxed{\alpha=y}$, $\boxed{\beta=x}$, $\gamma=z-\alpha-\beta$ c'est à dire $\boxed{\gamma=z-y-x}$, et donc la famille (u,v,w) est génératrice.
D'autre part (u,v,w) est une base parce que, d'après le théorème de la dimension, toute famille génératrice de n vecteurs (dans un espace vectoriel de dimension n) est aussi une base (c'est à dire est libre et génératrice).
Comme on l'a deviné, les méthodes utilisées à la question a) et à la question b), donnent une réponse positive parce que le déterminant de la matrice de ces systèmes d'équations, c'est à dire le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, n'est pas nul.

c) La décomposition du vecteur $U=(2,3,-1)$ dans la base canonique c'est à dire dans la base $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, est:

$$U=2(1,0,0)+3(0,1,0)-(0,0,1).$$

D'après formules obtenues à la question b), la décomposition du vecteur $U=(2,3,-1)$ dans la base (u,v,w) est:

$$U=3u+2v-6w.$$

Exercice 25.2 *Les sous ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^4$) sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$? si oui, en donner une base (ne pas utiliser la définition générale d'un espace vectoriel ...).*
On utilisera pour cela le cours : l'ensemble des combinaisons linéaires formées à partir des vecteurs d'une famille constitue un sous espace vectoriel; comment nomme t-on ce sous-espace ?
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$ *tel que* $x+y = 0$ *et* $2x-y+z = 0\}$ *; interprétation géométrique.*
$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$ *tel que* $x - y + z = 0$ *et* $x - y - z = 1\}$ *(réponse rapide ...).*
$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$ *tel que* $2x + y + 3z = 0\}$*; interprétation géométrique.*
$I = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^4,$ *tel que* $x + y = 0$ *et* $2x - y + t = 0\}$.

Réponse: **a)** Les équations $x + y = 0$ et $2x - y + z = 0$ permettent de calculer deux des variables en fonction de la troisième, par exemple y et z en fonction de x : on a $y = -x$ et $z = y - 2x = -3x$. On peut aussi exprimer le vecteur (x, y, z) lui-même en fonction de x:

$$(x, y, z) = (x, -x, -3x) = x(1, -1, -3).$$

F est donc l'ensemble des vecteurs colinéaires à $(1, -1, -3)$, qu'on appelle droite vectorielle de vecteur directeur $(1, -1, -3)$, ou sous-espace vectoriel engendré par $(1, -1, -3)$.

b) L'ensemble H n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car il n'est pas stable par multiplication par un réel. En effet quand on multiplie un élément (x, y, z) par 0, on obtient $(0, 0, 0)$, et il ne vérifie pas l'équation $x - y - z = 1$.

c) Vérifions que l'ensemble H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Ses éléments (x, y, z) vérifient $y = -2x - 3z$ ce qui fait

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (x, -2x - 3z, z)\\ &= (x, -2x, 0) + (0, -3z, z)\\ &= x(1, -2, 0) + z(0, -3, 1).\end{aligned}$$

H est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $(1, -2, 0)$ et $(0, -3, 1)$.

d) Vérifions que l'ensemble I est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Ses éléments (x, y, z, t) vérifient $y = -x$ et $t = y - 2x = -3x$ ce qui fait

$$\begin{aligned}(x, y, z, t) &= (x, -x, z, -3x)\\ &= (x, -x, 0, -3x)) + (0, 0, z, 0)\\ &= x(1, -1, 0, -3) + z(0, 0, 1, 0).\end{aligned}$$

I est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $(1, -1, 0, -3)$ et $(0, 0, 1, 0)$.

Exercice 25.3 *(plus ou moins hors programme) Montrer que le système* $U = (1, 1+X, 1 + X^2)$ *est une base de l'espace* $\mathbb{R}_2[X]$*. Quelles sont, dans la base canonique et dans cette base, les coordonnées de* $P(X) = X^2 + X$*? de* $Q(X) = X$*? de* $R(X) = 2X^2 - X - 1$*?*

Réponse: On calcule tous les triplets (α, β, γ) tels que $\alpha + \beta(1+X) + \gamma(1+X^2) = 0$, ce qui fait $\gamma X^2 + \beta X + (\alpha + \beta + \gamma) = 0$. On en déduit que γ et β sont nuls, et que $\alpha = -\beta - \gamma$ aussi, et donc la famille U est libre.
L'espace $\mathbb{R}_2[X]$ est l'ensemble des polynômes $aX^2 + bX + c$, il est de dimension 3 et donc (par le théorème de la dimension) la famille libre U forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
Il s'agit d'exprimer $P(X)$, $Q(X)$ et $R(X)$ en fonction des trois polynômes:
$P_1(X) = 1$, $P_2(X) = 1 + X$ et $P_3(X) = 1 + X^2$.
On voit tout de suite que:
$P(X) = -2P_0(X) + P_1(X) + P_2(X)$ (coordonnées $-2, 1, 1$)

$Q(X) = -P_0(X) + P_1(X)$ (coordonnées $-1, 1, 0$)
$R(X) = -2P_0(X) - P_1(X) + 2P_2(X)$ (coordonnées $-2, -1, 2$).

Exercice 25.4 *Que signifie la phrase : F est le sous espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs U ?*
Donner plusieurs réponses.
Pourquoi toute famille V contenant les éléments de U est-elle aussi génératrice ?

Réponse: F est l'ensemble des combinaisons linéaires $\alpha_1 u_1 + \alpha_1 u_2 + \dots$ d'éléments $u_1, u_2, \dots$ de U. Et F est aussi le plus petit ensemble qui soit un espace vectoriel et qui contienne les éléments de U. Si l'ensemble V est inclus dans F et contient U, il est générateur de F parce que $\alpha_1 u_1 + \alpha_1 u_2 + \dots$, quand $u_1, u_2, \dots$ sont des éléments de U, est aussi une combinaison linéaire d'éléments de V.

Exercice 25.5 *Montrer que la famille $V = \{(1,1,1,0), (1,1,0,0), (0,1,0,0)\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$; est -elle génératrice ?*

Réponse: Sans utiliser la méthode de démonstration standard, on voit bien que les vecteurs $(1,1,0,0)$ et $(0,1,0,0)$ ne sont pas colinéaires. Ils sont donc vecteurs directeurs d'un plan (le plan d'équation $y = z = 0$. Le vecteur $(1,1,1,0)$ n'est pas dans ce plan, les trois vecteurs de la famille V sont donc libres, mais ne peuvent engendrer $\mathbb{R}^4$ parce que d'après le théorème de la dimension il faut au moins quatre vecteurs pour engendrer $\mathbb{R}^4$.
Autre démonstration: Cherchons tous les triplets (α, β, γ) tels que $\alpha(1,1,1,0) + \beta(1,1,0,0) + \gamma(0,1,0,0) = (0,0,0,0)$. Cela fait

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

d'où on tire successivement $\alpha = 0$, $\beta = -\alpha = 0$ et $\gamma = -\alpha - \beta = 0$, donc la famille V est libre.
Elle ne peut pas être génératrice de $\mathbb{R}^4$, car si un vecteur (x, y, z, t) a sa quatrième coordonnée t non nulle, il ne peut pas s'écrire sous forme d'une combinaison linéaire $\alpha_1(1,1,1,0) + \alpha_2(1,1,0,0) + \alpha_3(0,1,0,0)$ puisque la quatrième coordonnée de ce vecteur est nul (ce vecteur est $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1, 0)$).

Exercice 25.6 *À l'aide des déterminants, dire si les systèmes suivants de vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$:*
a) $u = (1,0,2); v = (-1,3,1); w = (2,1,5)$.
b) $u' = (1,1,3); v' = (?1,3,0); w' = (2,0,0)$.
c) $u'' = (1,3,0); v'' = (?2,1,1); w'' = (?4,9,3)$.

Réponse: Les déterminants sont 0, -18 et 0, donc seul le deuxième système (ou famille de vecteurs) est une base.