Licence de Mathématiques L3 2007-2008

Algèbre, groupes et géométrie
Exercice 4 feuille 2

Soit λ une valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; il existe donc $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ avec les v_i non tous nuls, tel que

$$AV = \lambda V.$$

En appelant $\overline{V}$ le vecteur $\begin{pmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \vdots \\ \overline{v}_n \end{pmatrix}$ on en déduit (compte tenu que les coefficients de A sont réels)

$$A\overline{V} = \overline{\lambda V}$$

avec les $\overline{v}_i$ non tous nuls, donc $\overline{\lambda}$ est valeur propre de A. Le sous-espace propre $E_{\overline{\lambda}}$ associé à $\overline{\lambda}$ est l'ensemble des $\overline{V}$ pour tout $V \in E_\lambda$, qu'on note$\overline{E_\lambda}$.

Le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est

$$P_A(X) = -X^3 - 3X^2 - 3X = -X(X^2 + 3X + 3),$$

les valeurs propres sont donc 0, $\lambda = \dfrac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{\lambda} = \dfrac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$.
On peut calculer les vecteurs propres en utilisant le polynôme caractéristique: d'après le théorème de Cayley-Hamilton on a

$$0 = -A(A^2 + 3A + 3I) = -A(A - \lambda I)(A - \overline{\lambda} I).$$

En posant $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ on a donc

$$A(A^2 + 3A + 3I)U = 0 = 0 \cdot U$$

ce qui prouve que le vecteur $V_1 = (A^2 + 3A + 3I)U$ (c'est à dire la première colonne de $A^2 + 3A + 3I$) est un vecteur propre pour la valeur propre 0.
De même, le vecteur $V_2 = A(A - \overline{\lambda} I)U$ vérifie (en utilisant la commutativité des polynômes de matrices)

$$(A - \lambda I)V_2 = (A - \lambda I)A(A - \overline{\lambda} I)U = 0,$$

d'où on déduit qu'il est vecteur propre pour la valeur propre λ.
On calcule V_1, V_2 et son conjugué:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ 1 \\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overline{V_2} = \begin{pmatrix} \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ 1 \\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

et la matrice A est donc semblable à $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$