Université de Provence	2006–2007
Corrigé - Intégration 1 - 2ème session	
	15 juin 2007

Question de cours

Énoncer le théorème de convergence dominée de Lebesgue

Réponse : Soit (f_n) une suite de fonctions Lebesgue-intégrables sur I, convergeant presque partout vers une fonction f. On suppose qu'il existe une fonction Lebesgue-intégrable g telle que

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \textit{pour presque tout } x \in I, \ \textit{et } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors f est Lebesgue-intégrable sur I, et

$$\lim_{n \to +\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n \to +\infty} f_n = \int_I f.$$

Exercices

1. Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = \exp(x)\mathrm{sh}(2x) \quad \textbf{et} \quad g(x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(3x)}.$$

Réponse : Compte tenu que $\mathrm{sh}(2x) = \dfrac{\exp(2x) - \exp(-2x)}{2}$, *on obtient*

$$\int \exp(x)\mathrm{sh}(2x) \ \mathrm{d}x = \frac{1}{6}\exp(3x) + \frac{1}{2}\exp(-x) + C.$$

Pour la deuxième intégrale on calcule d'abord $\cos(3x)$ *en fonction de* $\cos x$ *:*

$$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

Le changement de variable sera donc $u = \cos x$. On obtient

$$\int \frac{\sin(2x)}{\cos(3x)} \ \mathrm{d}x = \int \frac{-2}{4u^2 - 3} \ \mathrm{d}u = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{Log}\left|\frac{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}}\right| + C.$$

2. La durée de vie moyenne E d'un atome de Carbone 14 est donnée par la formule

$$E = k\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-kt} \ \mathrm{d}t.$$

Calculer E, sachant que $k = 0,000121$.

Réponse : $E = \left[-\frac{1+kt}{k}\mathrm{e}^{-kt}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{1}{k} \simeq 8264,4628.$

Problème

Le but de ce problème est de montrer que la constante d'Euler e **est irrationnelle.**

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = x^n$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que si $k \neq n$, alors $u_n^{(k)}(0) = 0$ et que l'on a $u_n^{(n)}(0) = n!$.

Réponse : Pour $k \leq n$ on a $u_n^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)\cdot x^{n-k}$ qui s'annule en $x = 0$, sauf si $k = n$ puisque $u_n^{(n)}(x) = n(n-1)\dots 1 \cdot x^0 = n!$ pour tout x. On remarque que $u_n^{(n)}(x)$ ne dépend pas de x, ses dérivées successives sont donc nulles.

2. Soit

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

une fonction polynôme à coefficients réels. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que si $k \leq n$ on a $P^{(k)}(0) = k!a_k$ et que si $k > n$ alors $P^{(k)}(0) = 0$.

Réponse : On remarque que $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i u_i(x)$ et par conséquent $P^{(k)}(0) = \sum_{i=0}^{n} a_i u_i^{(k)}(0)$. En utilisant le résultat de la question précédente, cette somme vaut $a_k u_k^{(k)}(0) = a_k k!$ si k est compris entre 0 et n, et sinon elle vaut 0.

3. Soit maintenant

$$P(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}.$$

Quel est le degré de P ? Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)}(0)$ et $P^{(k)}(1)$ sont des nombres entiers relatifs.

Réponse : Remarquons d'abord que le polynôme $(1-x)^n$ est de degré n. Il s'écrit sous la forme

$$(1-x)^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

(inutile de connaitre par coeur la formule du binôme, ce qui nous intéresse

c'est de savoir que les coefficients a_i sont entiers). On en déduit

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{n!} x^{n+i} = \sum_{i=0}^{2n} b_i x^i \quad \textit{avec } b_i = \begin{cases} 0 & \textit{si } i < n \\ \dfrac{a_{i-n}}{n!} & \textit{si } n \leq i \leq 2n \\ 0 & \textit{si } i > 2n \end{cases} \tag{1}$$

(polynôme de degré $2n$). D'après la question précédente et d'après (1),

$$P^{(k)}(0) = \begin{cases} k!b_k = 0 & \textit{si } k < n \\ k!b_k = \dfrac{k!a_{k-n}}{n!} & \textit{si } n \leq k \leq 2n \\ 0 & \textit{si } k > 2n. \end{cases}$$

Mais $\dfrac{k!}{n!}$ est entier dans le cas $n \leq k \leq 2n$. On conclut que $P^{(k)}(0)$ est entier dans tous les cas.

En dérivant k fois la relation évidente $P(x) = P(1-x)$, on obtient $P^{(k)}(x) = (-1)^k P^{(k)}(1-x)$ et par conséquent $P^{(k)}(1) = (-1)^k P^{(k)}(0)$ est entier.

4. On pose

$$f(x) = 2^{2n}P(x) - 2^{2n-1}P'(x) + 2^{2n-2}P^{(2)}(x) - \cdots - 2^1 P^{(2n-1)}(x) + 2^0 P^{(2n)}(x)$$

et $g(x) = \mathrm{e}^{2x} f(x)$.

(a) Montrer que f est une fonction polynôme.

(b) Montrer que $f(0)$ et $f(1)$ sont des entiers relatifs.

(c) Montrer que l'on a $g'(x) = 2^{2n+1}\mathrm{e}^{2x}P(x)$.

Réponse : (a) f est une somme de polynômes.

(b) $f(0)$ et $f(1)$ sont entiers d'après la question 3.

(c) $g'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}f(x) + \mathrm{e}^{2x}f'(x)$. En remplaçant $f(x)$ et $f'(x)$ par leurs valeurs, les termes s'éliminent deux à deux et il reste $2^{2n+1}\mathrm{e}^{2x}P(x)$.

5. On suppose ici qu'il existe deux nombres entiers positifs tels que $\mathrm{e}^2 = a/b$, et l'on se propose de montrer que cela aboutit à une contradiction. On pose

$$A_n = b \int_0^1 2^{2n+1}\mathrm{e}^{2t}P(t)\ \mathrm{d}t. \tag{2}$$

(a) Montrer que A_n est un entier.

(b) Montrer que $A_n > 0$.

(c) Montrer enfin que l'on a la majoration

$$A_n \leq b\mathrm{e}^2 \frac{2^{2n+1}}{n!}.$$

(d) En déduire que e^2 **ne peut être rationnel, et montrer enfin que cela implique que** e **est irrationnel.**

Réponse : (a) D'après la question 4.(c),

$$A_n = b(g(1) - g(0)) = b(\mathrm{e}^2 f(1) - f(0)) = af(1) - bf(0).$$

C'est entier d'après 4.(b).

(b) On sait que l'intégrale d'une fonction continue positive ou nulle est strictement positive, sauf si cette fonction est nulle en tout point de l'intervalle d'intégration, ce qui n'est pas le cas de $b2^{2n+1}\mathrm{e}^{2t}P(t)$ *sur l'intervalle* $[0, 1]$.

(c) Cette majoration se déduit de (2) en majorant $P(t)$ *par* $\dfrac{1}{n!}$ *(pour* $t \in [0, 1]$*), puis en intégrant* $b2^{2n+1}\mathrm{e}^{2t}\dfrac{1}{n!}$ *sur l'intervalle* $[0, 1]$.

(d) De cette inégalité on déduit que A_n *est strictement plus petit que* 1 *pour* n *assez grand (parce que* $\dfrac{2^{2n+1}}{n!}$ *tend vers* 0 *quand* $n \to +\infty$*). D'où une contradiction entre* $0 < A_n < 1$ *et* A_n *entier. Cette contradiction prouve que l'hypothèse du début de la question 5. est fausse ; autrement dit* e^2 *ne peut pas être rationnel ; et* e *non plus (s'il l'était,* e^2 *serait rationnel).*