Université de Provence	2007–2008

Corrigé - Intégration 1 - 2ème session

17 juin 2008

Question de cours

Énoncer le théorème de convergence dominée.

Réponse : Soit (f_n) une suite de fonctions Lebesgue-intégrables sur l'intervalle I, convergeant presque partout vers une fonction f. On suppose qu'il existe une fonction Lebesgue-intégrable g telle que

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \textit{pour presque tout } x \in I \textit{ et pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors f est Lebesgue-intégrable sur I, et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n = \int_I f.$$

Exercices

1. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^1 \sin(x^3)\tan(x^3+x)\ \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} te^{-t}\ \mathrm{d}t.$$

La première intégrale est nulle parce que c'est l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle centré en 0.

La deuxième intégrale est égale à $\left[-te^{-t}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}\ \mathrm{d}t = \left[-te^{-t} - e^{-t}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} = 1.$

2. Calculer la primitive suivante :

$$\int \frac{1}{(x+2)(x^2-2x+1)}\ \mathrm{d}x.$$

La décomposition en éléments simples de $\frac{1}{(x+2)(x^2-2x+1)}$ est

$$-\frac{1}{9}\frac{1}{x+2} + \frac{2}{3}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{9}\frac{1}{x-1}$$

donc sa primitive est

$$-\frac{1}{9}\mathrm{Log}|x+2| - \frac{2}{3}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{9}\mathrm{Log}|x-1| + C.$$

3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = 1/2.$$

Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0, 1]$ (on pourra raisonner par l'absurde).

Si elle n'admet pas de solution, il ne peut pas exister x_1 et x_2 dans $[0, 1]$ tels que $f(x_1) - x_1 > 0$ et $f(x_2) - x_2 < 0$: s'ils existaient, la fonction continue $f(x) - x$ s'annulerait par le théorème des valeurs intermédiaires. On a donc soit $f(x) > x$ pour tout $x \in [0, 1]$, soit $f(x) < x$ pour tout $x \in [0, 1]$. En intégrant on en déduit $\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x > 1/2$ dans le premier cas et $\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x < 1/2$ dans le second, ce qui contredit l'énoncé.

4. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ l'intégrale

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\sin(x\mathrm{Log}n)}{\mathrm{Log}(n)\sin x}\ \mathrm{d}x$$

est convergente, et déterminer la limite de la suite (I_n) quand n tend vers l'infini.

Remarquons que

$$\frac{\sin(x\mathrm{Log}n)}{\mathrm{Log}(n)\sin x} = \frac{\frac{\sin(x\mathrm{Log}n)}{x\mathrm{Log}n}}{\frac{\sin x}{x}}. \tag{1}$$

Cette fonction tend vers $\frac{1}{1} = 1$ quand $x \to 0$, elle est donc prolongeable en une fonction continue en $x \in [0, \pi[$. Cependant quand $x \to \pi$ on a

$$\frac{\sin(x\mathrm{Log}n)}{\mathrm{Log}(n)\sin x} \sim \frac{\sin(\pi\mathrm{Log}n)}{\mathrm{Log}(n)\sin x} = \frac{\sin(\pi\mathrm{Log}n)}{\mathrm{Log}(n)\sin(\pi - x)} \sim \frac{\sin(\pi\mathrm{Log}n)}{\mathrm{Log}(n)(\pi - x)}$$

et cette fonction n'est pas intégrable : sa primitive $-\frac{\sin(\pi\mathrm{Log}n)}{\mathrm{Log}(n)}\mathrm{Log}|\pi - x|$ tend vers $\pm\infty$ quand $x \to \pi$. Il fallait donc remplacer $\int_0^\pi$ par $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ dans l'énoncé, au quel cas $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x\mathrm{Log}n)}{\mathrm{Log}(n)\sin x}\ \mathrm{d}x$ converge puisque c'est l'intégrale d'une fonction continue.

Puis on démontre que $\lim_{n\to+\infty} I_n$ est nul en utilisant le théorème de convergence dominée. En effet la fonction $\frac{\sin(x\mathrm{Log}n)}{\mathrm{Log}(n)\sin x}$ tend vers 0 quand x est fixé et n tend vers l'infini (à cause du $\mathrm{Log}n$ qui est au dénominateur), et elle est majorée par la fonction constante $\frac{2}{\pi}$ qui est intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\big($pour démontrer cette majoration on utilise l'égalité (1), où le numérateur est majoré par 1 et le dénominateur $\frac{\sin x}{x}$ est une fonction décroissante minorée par $\frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\big)$, donc son intégale tend vers 0.

5. Calculer l'intégrale double

$$\int\int_K xy\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

sur le compact K limité par les côtés du triangle OAB avec A de coordonnées $(1, 0)$ et B de coordonnées $(1, 3)$.

Il s'agit d'intégrer xy entre les côtés du triangle délimité par les droites d'équation $y = 0$ et $y = 3x$, avec $x \in [0, 1]$:

$$\int\int_K xy\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=3x} xy\ \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=1} x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=3x} \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=1} \frac{9x^3}{2}\mathrm{d}x = \left[\frac{9x^4}{8}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{9}{8}.$$