

Question de cours

Énoncer le théorème de convergence dominée.

Réponse : Soit (f_n) une suite de fonctions Lebesgue-intégrables sur l'intervalle I , convergeant presque partout vers une fonction f . On suppose qu'il existe une fonction Lebesgue-intégrable g telle que

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \text{pour presque tout } x \in I \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors f est Lebesgue-intégrable sur I , et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \int_I f.$$

Exercices

1. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{|x|} \sin x \, dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\text{Log} 2} \sqrt{e^x - 1} \, dx.$$

La première intégrale est nulle parce que c'est l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle centré en 0.

La deuxième intégrale, par le changement de variable $u = \sqrt{e^x - 1}$, est égale à $\int_{u=0}^{u=1} \frac{2u^2}{u^2 + 1} \, du$ et, par $2u^2 = 2u^2 + 2 - 2$,

elle est égale à $\int_{u=0}^{u=1} 2 \, du - \int_{u=0}^{u=1} \frac{2}{u^2 + 1} \, du = \boxed{2 - \frac{\pi}{2}}.$

2. Calculer la primitive suivante :

$$\int \frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)} \, dx.$$

On peut se servir de l'identité de Bezout : on remarque que $x^2 + 2x + 5 = x(x+2) + 5$ d'où $5 = (x^2 + 2x + 5) - x(x+2)$ et ainsi on obtient l'identité de Bezout

$$1 = \frac{1}{5}(x^2 + 2x + 5) - \frac{1}{5}x(x+2)$$

d'où on déduit

$$\frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)} = \frac{1}{5} \frac{1}{x+2} - \frac{1}{5} \frac{x}{x^2+2x+5}$$

et, en remplaçant le x du numérateur par $x+1-1$ et en intégrant,

$$\int \frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)} \, dx = \boxed{\frac{1}{5} \text{Log}(x+2) - \frac{1}{10} \text{Log}(x^2+2x+5) + \frac{1}{10} \arctan \frac{x+1}{2} + C}.$$

3. Le graphe d'une fonction dérivable $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est la courbe du plan $\mathbb{R}^2$ paramétrée par

$$\gamma(t) = (t, f(t)), \quad t \in [a, b].$$

On admet que la longueur de ce graphe est donnée par l'intégrale suivante :

$$\text{L}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.$$

Donner une justification heuristique de cette formule.

La distance entre le point d'abscisse x (sur le graphe de f) et le point d'abscisse $x + h$ (sur la tangente au point d'abscisse x) est $\sqrt{h^2 + (hf'(x))^2} = h\sqrt{1 + (f'(x))^2}$. L'intégrale de l'énoncé est la limite quand h tend vers 0 de la somme des $h\sqrt{1 + (f'(x))^2}$, relative à une partition de $[a, b]$ en intervalles $[x, x + h]$.

(a) À quelle condition sur le réel a l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2 - 1)^2} \, dt$$

est-elle convergente ? La calculer quand elle converge.

Il faut que $a > 1$, sinon l'équivalent $\frac{t^2}{(t^2 - 1)^2} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{4(t - 1)^2}$ empêche l'intégrale de converger. Il n'y a pas de problème

en $t \rightarrow +\infty$ puisque $\frac{t^2}{(t^2 - 1)^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$.

La décomposition de $\frac{t^2}{(t^2 - 1)^2}$ en éléments simples est

$$\frac{t^2}{(t^2 - 1)^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{(t - 1)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{(t + 1)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{t - 1} - \frac{1}{4} \frac{1}{t + 1}.$$

Or la primitive de $\frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t + 1}$ est $\text{Log}(t - 1) - \text{Log}(t + 1) = \text{Log}\left(\frac{t - 1}{t + 1}\right)$, qui tend vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$. On a donc

$$\int_a^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2 - 1)^2} \, dt = \left[-\frac{1}{4} \frac{1}{t - 1} - \frac{1}{4} \frac{1}{t + 1} + \frac{1}{4} \text{Log}\left(\frac{t - 1}{t + 1}\right) \right]_{t=a}^{t \rightarrow +\infty} = \frac{1}{4} \frac{1}{a - 1} + \frac{1}{4} \frac{1}{a + 1} - \frac{1}{4} \text{Log}\left(\frac{a - 1}{a + 1}\right) = \boxed{\frac{a}{2(a^2 - 1)} + \frac{1}{4} \text{Log}\left(\frac{a + 1}{a - 1}\right)}.$$

(b) En déduire la longueur du graphe de la fonction $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi = \sqrt{x}$ (on utilisera le changement de variable $t = \sqrt{1 + (4x)^{-1}}$).

D'après la formule de l'énoncé cette longueur est égale à $\int_0^1 \sqrt{1 + (4x)^{-1}} \, dx$. Par le changement de variable $t = \sqrt{1 + (4x)^{-1}}$ elle est égale à $\int_{+\infty}^{\frac{5}{4}} t(2t)(-4) \left(\frac{1}{4(t^2 - 1)}\right)^2 \, dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{5}{4}}^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2 - 1)^2} \, dt$. D'après le résultat de la question (a) c'est donc

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{\frac{5}{4}}}{2\left(\frac{5}{4} - 1\right)} + \frac{1}{4} \text{Log}\left(\frac{\sqrt{\frac{5}{4}} + 1}{\sqrt{\frac{5}{4}} - 1}\right) \right) = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{8} \text{Log}(9 + 4\sqrt{5})}.$$

(c) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b]$ et telle que

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = +\infty.$$

Démontrer que l'intégrale

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$

est convergente.

L'inégalité $\sqrt{1+t} \leq 1 + \sqrt{t}$ est vraie pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, parce qu'en élevant au carré elle est équivalente à $1+t \leq 1+2\sqrt{t}+t$. On en déduit que l'intégrale $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$ (qui à priori peut être finie ou infinie puisque c'est l'intégrale d'une fonction positive) est majorée par $\int_a^b (1 + |f'(x)|) \, dx$. La fonction f' tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow a$ et elle est donc positive sur un intervalle $[a, c]$. L'intégrale $\int_a^c (1 + |f'(x)|) \, dx = \int_a^c (1 + f'(x)) \, dx$ est convergente (c'est à dire finie) : elle vaut $[x + f(x)]_a^c = c + f(c) - a - f(a)$. Il reste à démontrer que l'intégrale $\int_c^b (1 + |f'(x)|) \, dx$ est convergente ; pour cela il fallait supposer dans l'énoncé que f' est continue sur $]a, b]$ (sinon on a le contre-exemple classique de la dérivée intégrable mais non absolument intégrable). Avec cette hypothèse, $1 + |f'(x)|$ est continue sur l'intervalle fermé $[c, b]$ donc intégrable.

4. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ la suite de fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{(\ln(x))^{2n} - 2}{(\ln(x))^{2n} + 2}.$$

(a) Démontrer que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement, quand n tend vers l'infini, vers une fonction f qu'on déterminera.

Ça dépend si $|\ln(x)|$ est plus petit que 1, vaut 1 ou est plus grand que 1. On a donc

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in \left] \frac{1}{e}, e \right[\\ -\frac{1}{3} & \text{si } x = \frac{1}{e} \text{ ou } e \\ 1 & \text{si } x \in \left] 0, \frac{1}{e} \right[\cup]e, +\infty[\end{cases}$$

(b) démontrer que

$$\int_1^3 f_n(x) \, dx$$

converge vers

$$\int_1^3 f(x) \, dx$$

quand n tend vers l'infini.

Le théorème de convergence dominée s'applique puisque $(f_n)_{n \geq 0}$ est une suite simplement convergente de fonctions intégrables et qu'elles sont majorées par $g(x) = 1$ qui ne dépend pas de n .

5. Calculer l'intégrale double

$$\int \int_K xy \, dx dy$$

sur le compact K limité par les côtés du triangle OAB avec A de coordonnées $(2a, a)$ et B de coordonnées $(3a, 3a)$.

Il s'agit d'intégrer xy entre les côtés du triangle, c'est à dire pour tout $x \in [0, 2a]$ on intègre entre $y = \frac{x}{2}$ et $y = x$ et pour tout $x \in [2a, 3a]$ on intègre entre $y = 2x - 3a$ et $y = x$. On obtient

$$\int_{x=0}^{x=2a} \left(\int_{y=\frac{x}{2}}^{y=x} xy \, dy \right) dx + \int_{x=2a}^{x=3a} \left(\int_{y=2x-3a}^{y=x} xy \, dy \right) dx = \frac{31}{8} a^4.$$