Université de Provence 2004–2005

Corrigé - Intégration 1 - 1ère session

10 mai 2005

– Question de cours –

1) La condition d'intégrabilité sur $[0,+\infty[$ est donnée par le théorème de Hake.
2) f est Lebesgue-intégrable si f et $|f|$ sont intégrables.
Théorème de convergence dominée: Si chaque f_n est Lebesgue-intégrable et si les $|f_n|$ sont majorés par une fonction Lebesgue-intégrable g qui ne dépend pas de n, si de plus pour tout $x \in [a,b]$ fixé la limite $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ existe, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

– Exercice 1 –

Avec le changement de variable $t = x-1$ on a

$$\int \frac{dx}{((x-1)^2-4)^2} = \int \frac{dt}{(t^2-4)^2}$$

et $\dfrac{1}{(t^2-4)^2} = \dfrac{1}{(t+2)^2(t-2)^2}$ se décompose en éléments simples:

$$\frac{1}{(t+2)^2(t-2)^2} = \frac{a}{(t+2)^2} + \frac{b}{t+2} + \frac{c}{(t-2)^2} + \frac{d}{t-2}.$$

On calcule $a = \left(\dfrac{1}{(t-2)^2}\right)_{t=-2} = \dfrac{1}{16}$ et $c = \left(\dfrac{1}{(t+2)^2}\right)_{t=2} = \dfrac{1}{16}$, puis $b = \dfrac{1}{32}$ et $d = -\dfrac{1}{32}$ (en faisant $t = 0$, 1 ou -1).
Puis on intègre les quatre éléments simples; on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{((x-1)^2-4)^2} &= -\frac{1}{16(t+2)} + \frac{1}{32}\ln|t+2| - \frac{1}{16(t-2)} - \frac{1}{32}\ln|t-2| + C\\ &= -\frac{1}{16(x+1)} + \frac{1}{32}\ln|x+1| - \frac{1}{16(x-3)} - \frac{1}{32}\ln|x-3| + C.\end{aligned}$$

– Exercice 2 –

(a) La fonction constante 1 est intégrable sur $[-1,1]$ parce qu'elle est continue.

(b) Elle n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$ puisque son intégrale sur $[0,X]$ vaut X, et $\lim\limits_{X\to+\infty} X = +\infty$.

(c) Il n'existe pas de fonction continue positive sur $[-1,1]$, non partout nulle, d'intégrale nulle:
si $f(x_0) > 0$ alors, comme f est continue, on a $f(x) > \dfrac{f(x_0)}{2}$ pour tout x dans un intervalle $[x_0-\alpha, x_0+\alpha] \cap [-1,1]$ donc l'intégrale de f vaut au moins $\dfrac{f(x_0)}{2}\alpha$.

(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x \cos x\, dx$ est égal au produit de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\, dx$ par $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos x\, dx$ parce que chacune de ces trois intégrales est nulle.

– Exercice 3 –

Pour l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{Log}(\sin u)\, du$, voir le corrigé de la planche 4.

– Exercice 4 –

$$I_n = \int_{-1}^{1} \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\ dt.$$

(a) Il s'agit de démontrer que pour n fixé, la fonction $f_n(t) = \dfrac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur l'intervalle $]-1,1[$. Or sa valeur absolue $|f_n|$ est majoré par une fonction g qu'on définit par

$$g(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{1+t} & \text{si } t \in]-1,0[\\ \\ 1/\sqrt{1-t} & \text{si } t \in [0,1[. \end{cases}$$

En effet dans les deux cas on a $|t^n| \leq 1$, et on a dans le premier cas $1-t \geq 1 \Rightarrow 1-t^2 = (1+t)(1-t) \geq 1+t$, et dans le second $1+t \geq 1 \Rightarrow 1-t^2 = (1+t)(1-t) \geq 1-t$.
On peut donc utiliser le critère de comparaison (proposition 8.3 du cours), ce qui prouve que f_n est intégrable.

(b) Cette même majoration $|f_n(t)| \leq g(t)$ permet d'utiliser le théorème de convergence dominée (voir la $2^{\text{ème}}$ question de cours ci-dessus) puisque la fonction g ne dépend pas de n. La fonction $f_n(t) = \dfrac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}$ tendant vers 0 pour $t \in]-1,1[$ fixé et $n \to +\infty$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_{-1}^{1} 0\ dt = 0.$$