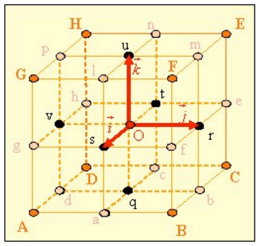
Solutions des exercices de méca

Exercice 1

On a représenté ci-dessous le cube ABCDEFGH de centre O et de côté 2 (unité de longueur).



Le repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est centré en O et les vecteurs de bases $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont parallèles aux côtés du cube.

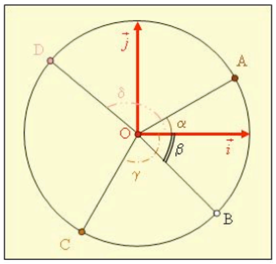
Question : Exprimer les coordonnées cartésiennes x, y et z des points considérés (***attention : Tenir compte des majuscules et des minuscules***).

UNIVERSITÉ DE PROVENCE/PÔLE TICE - PROJET SOCRATES - E. SALANçON 2005-2006

Point A : x =	1	1.0
Point A : y =	-1	1.0
Point A : z =	-1	1.0
Point H : x =	-1	1.0
Point H : y =	-1	1.0
Point H : z =	1	1.0
Point r : x =	0	1.0
Point r : y =	1	1.0
Point r : z =	0	1.0
Point p : x =	0	1.0
Point p : y =	-1	1.0
Point p : z =	1	1.0
Point n : x =	-1	1.0
Point n : y =	0	1.0
Point n : z =	1	1.0
Point c : x =	-1	1.0
Point c : y =	0	1.0
Point c : z =	-1	1.0
Point l : x =	1	1.0
Point l : y =	0	1.0
Point l : z =	1	1.0
Point t : x =	-1	1.0
Point t : y =	0	1.0
Point t : z =	0	1.0

Exercice 2

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repére cartésien orthonormé direct du plan. Le cercle ci-dessous est de centre O et de diamètre 2 unités. Les valeurs des angles sont : $\alpha = 30°$, $\beta = -45°$, $\gamma = -120°$ et $\delta = 135°$.



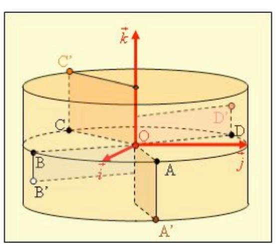
Question : Exprimer les coordonnées cartésiennes x et y des points proposés.

Par exemple les coordonnées de A sont cos α et sin α .

Point A : x =	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1.0
Point A : y =	$\frac{1}{2}$	1.0
Point B : x =	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1.0
Point B : y =	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1.0
Point C : x =	$-\frac{1}{2}$	1.0
Point C : y =	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1.0
Point D : x =	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1.0
Point D : y =	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1.0

Exercice 3

Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repére cartésien orthonormé direct de l'espace. Le cylindre représenté ci-dessous est centré en O : son diamètre vaut 2 unités et sa longueur 1 unité.



Les points A, B et C sont définis par les mêmes angles qu'à l'exercice 2 dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$. C'est à dire que pour A : $\alpha = 30°$, pour B : $\beta = -45°$, pour C : $\gamma = -120°$ et pour D : $\delta = 135°$.

Question : Exprimer les coordonnées cartésiennes x, y et z des points indiqués ci-dessous.

Les deux premières coordonnées sont les même qu'à l'exercice précédent.

Point A' : x =	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.5
Point A' : y =	$\frac{1}{2}$	0.5
Point A' : z =	$-\frac{1}{2}$	1.0

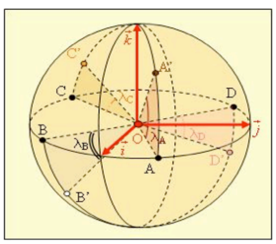
Point B' : x =	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.5
Point B' : y =	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.5
Point B' : z =	$-\frac{1}{4}$	1.0

Point C' : x =	$-\frac{1}{2}$	0.5
Point C' : y =	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.5
Point C' : z =	$\frac{1}{2}$	1.0

Point D' : x =	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.5
Point D' : y =	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.5
Point D' : z =	$\frac{1}{4}$	1.0

Exercice 4

Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repére orthonormé direct de l'espace. La sphère ci-dessous est de centre O et de diamètre 2 unités.



Les points A, B et C du plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ sont définis par les mêmes angles qu'à l'exercice 2 ; ainsi, pour A : $\alpha = 30°$, pour B : $\beta = -45°$, pour C : $\gamma = -120°$ et pour D : $\delta = 135°$. Les angles entre le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ et le vecteur $\vec{k}$ qui définissent les point A', B', C' et D' sont respectivement : $\lambda_A = 50°$, $\lambda_B = -35°$, $\lambda_C = 20°$ et $\lambda_D = -25°$.

Question : Exprimer les coordonnées cartésiennes x, y et z des points indiqués ci-dessous *(Vous indiquerez les coordonnées avec 2 chiffres après la virgule)*.

UNIVERSITÉ DE PROVENCE/PÔLE TICE - PROJET SOCRATES - E SALANÇON 2005-2006

OA'=1 parce que A' est sur la sphère. Il se projette sur le plan $\vec{i},\vec{j}$ en un point M tel que OM=OA' cos(λ_A)= cos(λ_A). Ne pas confondre M avec A, qui est sur la sphère. Les coordonnees de M sont (cos(λ_A)cos(α), cos(λ_A)sin(α), 0); celles de A' sont (cos(λ_A)cos(α), cos(λ_A)sin(α), sin(λ_A)). La troisième coordonnée sin(λ_A) représente la projection de A' sur la droite de vecteur directeur $\vec{k}$, c'est à dire cos($\frac{\pi}{2}-\lambda_A$).

Point A' : x =	0 , 5 5	1.0
Point A' : y =	0 , 3 2	1.0
Point A' : z =	0 , 7 6	1.0

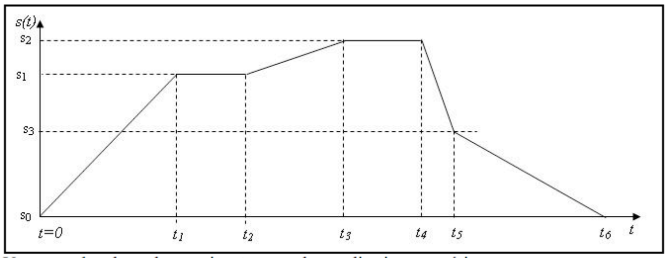
Point B' : x = 0,57	1.0
Point B' : y = −0,57	1.0
Point B' : z = −0,57	1.0

Point C' : x = −0,46	1.0
Point C' : y = −0,81	1.0
Point C' : z = 0,34	1.0

Point D' : x = −0,64	1.0
Point D' : y = 0,64	1.0
Point D' : z = −0,42	1.0

Exercice 1

Le graphe ci-dessous permet de connaître la position $s(t)$ d'un marcheur en fonction du temps sur sa trajectoire. Il fait un aller-retour sur le même chemin mais, en fonction du dénivellé, marche plus ou moins vite.



Vous prendrez les valeurs suivantes pour les applications numériques :

t_1 = 1 h ; t_2 = 1 h 30 min ; t_3 = 2 h 14 min ;

t_4 = 2 h 48 min ; t_5 = 3 h ; t_6 = 4 h 10 min ;

s_0 = 0 m ; s_1 = 4 km ; s_2 = 4 km 850 m et s_3 = 2 km 330 m.

Question 1 - Déterminez la vitesse du marcheur (avec deux chiffres après la virgule si cela est nécessaire) dans les intervalles de temps indiqués ci-dessous.

Question 2 - Déterminez les équations de droites indiquées ci-dessous en considérant que $s(t)$ est donné en km et t en h. $s(t)=at+b$, donnez a et b avec deux chiffres après la virgule sauf si cela n'est pas nécessaire.

UNIVERSITÉ DE PROVENCE/PÔLE TICE - PROJET SOCRATES - E. SALANÇON 2005-2006

Il s'agit de trouver les équations des segments de droite qui sont sur le dessin: pour trouver l'équation du mouvement, c'est à dire la position du marcheur en fonction du temps, entre le temps t_i et le temps t_{i+1} on calcule les constantes a et b telles que $s_i=at_i+b$ et $s_{i+1}=at_{i+1}+b$, et l'equation sera s(t)=at+b pour tout temps t entre t_i et t_{i+1}.

Valeur de la vitesse : v_0 = 4 km/h.
Equation du mouvement : $s_0(t)$ = 4 .t
Dérivée par rapport au temps : $s_0'(t)$ = 4

Valeur de la vitesse : v_1 = 0 km/h.
Equation du mouvement : $s_1(t)$ = 0 .t + 4
Dérivée par rapport au temps : $s_1'(t)$ = 0

Valeur de la vitesse : v_2 = 1,16 km/h.
Equation du mouvement : $s_2(t)$ = 1,16 .t + 2,26
Dérivée par rapport au temps : $s_2'(t)$ = 1,16

Valeur de la vitesse : v_3 = 0 km/h.
Equation du mouvement : $s_3(t)$ = 0 .t + 4,85
Dérivée par rapport au temps : $s_3'(t)$ = 0

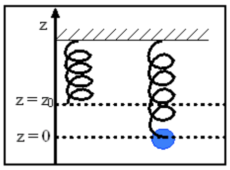
Valeur de la vitesse : v_4 = 12,6 km/h.
Equation du mouvement : $s_4(t)$ = −12,6 .t + 40,13
Dérivée par rapport au temps : $s_4'(t)$ = −12,6

Valeur de la vitesse : $v_5 =$ 2 km/h.
Equation du mouvement : $s_5(t) =$ - 2 . t + 8 , 3 3
Dérivée par rapport au temps : $s'_5(t) =$ - 2

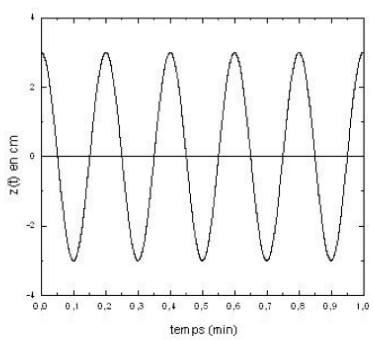
La valeur absolue de la vitesse	est la valeur absolue de la dérivée de la position par rapport au temps.

Exercice 2

Le schéma ci-dessous montre un ressort vertical sur lequel une masse a été accrochée. Quelqu'un étire le ressort de 3 cm puis le lâche. Le ressort se met alors à osciller autour de sa position d'équilibre.



Le graphe ci-dessous permet de connaître la position z de la masse au bout du ressort en fonction du temps.



Question 1- Déterminer l'équation qui permet de décrire la position de la masse en fonction du temps en considérant z en cm et t en min.

Question 2- Déduisez-en la vitesse qui anime cette masse . Les valeurs numériques seront données avec deux chiffres après la virgule maximum.

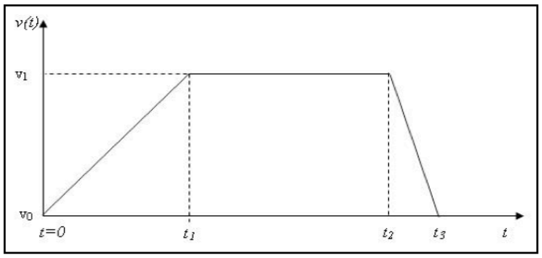
UNIVERSITÉ DE PROVENCE/PÔLE TICE - PROJET SOCRATES - EE. SALANÇON 2005-2006

La courbe ressemble à celle de la fonction cosinus. L'équation d'une telle courbe est $z(t) = z_0 \cos(\omega t)$. Comme à l'exercice précédent, on calcule z_0 et ω en donnant des valeurs à t.

Equation du mouvement : $z(t) =$ 3 cos (2π 5 t)
Dérivée par rapport au temps : $z'(t) =$ - 9 4 , 2 4 sin (2π 5 t)
Position de la masse après 18 s (valeur algébrique): $z =$ - 3 cm.
Valeur algébrique de la vitesse après 18 s : $v =$ 0 cm/min.
Valeur algébrique de la position après 21 s : $z =$ 0 cm.
Valeur algébrique de la vitesse après 21 s : $v =$ 9 4 , 2 4 cm/min.

Exercice 3

Une voiture sur l'autoroute accélère de façon constante pour atteindre une vitesse de 130 km/h. Elle reste à cette allure tout le long de son trajet de t_1 à t_2 puis décélère de façon constante lorsqu'elle arrive près du péage. Le graphe ci-dessous représente le profil de vitesse en fonction du temps de la voiture.



La vitesse initiale est nulle (v_0 = 0 km/h), et la voiture met 1/4 h (t_1 = 15 min) pour atteindre les 130 km/h (v_1 = 130 km/h). Elle reste ensuite 1 h (t_2 = 1 h 15 min) à cette allure puis décélère en 2 min (t_3 = 1 h 17 min).

Question : Déterminez la distance parcourue par la voiture (*indication : exprimez les temps en heure et les distances en km pour tous vos calculs. Vous donnerez deux chiffres après la virgule si cela est nécessaire*).

UNIVERSITÉ DE PROVENCE/PÔLE TICE - PROJET SOCRATES - E. SALANçON 2005-2006

Même méthode qu'à l'exercice sur le marcheur; on calcule l'équation des segments de droite du dessin (sans s'occuper de savoir que cette fois le dessin représente la vitesse et non la position).

Expression de la vitesse : $v_1(t) =$ 520 .t
Primitive de la vitesse par rapport au temps : S(t) = 260 . t ² + 0 . t + c *(avec c : constante quelconque)*
Intégrale de la vitesse par rapport au temps (distance parcourue) : $s_1 =$ 16,25 km.

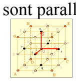
Expression de la vitesse : $v_2(t) =$ 0 .t + 130
Primitive de la vitesse par rapport au temps : S(t) = 0 . t ² + 130 . t + c *(avec c : constante quelconque)*
Intégrale de la vitesse par rapport au temps (distance parcourue) : $s_2 =$ 130 km.

Expression de la vitesse : $v_3(t) =$ -3900 . t + 5005
Primitive de la vitesse par rapport au temps : S(t) = -1950 . t ² + 5005 . t + c *(avec c : constante quelconque)*
Intégrale de la vitesse par rapport au temps (distance parcourue) : $s_3 =$ 2,16 km.

Distance totale parcourue : 148,42 km.

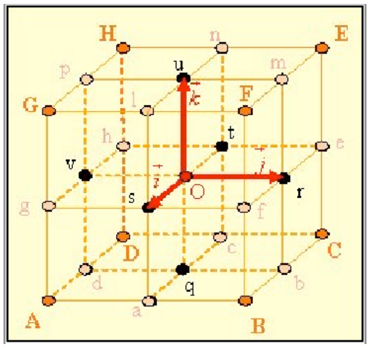
Sommes de vecteurs

Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère cartésien orthonormé direct. Le cube ci-dessous est centré à l'origine O ; ses arêtes valent 2 unités et sont parallèles aux vecteurs unitaires $\vec{i}$,$\vec{j}$ et $\vec{k}$.



Question. - Exprimez les composantes dans le repère cartésien (x, y, z) des vecteurs proposés. *(ATTENTION ! Tenir compte des majuscules et des minuscules.)*

UNIVERSITÉ DE PROVENCE/PÔLE TICE - PROJET SOCRATES - E. SALANçON 2005-2006



$\overrightarrow{Ac}$ $\overrightarrow{Ht}$ $\overrightarrow{nl}$ $\overrightarrow{pr}$

x =	-2	1.0
y =	1	1.0
z =	0	1.0

x =	0	1.0
y =	1	1.0
z =	-1	1.0

x =	2	1.0
y =	0	1.0
z =	0	1.0

x =	0	1.0
y =	2	1.0
z =	-1	1.0

Sommes de vecteurs (Escartefigue I)

C'est le premier jour d'Escartefigue dans son rôle de capitaine de ferry-boat! Le courant de l'eau a une vitesse de 4 noeuds (8 km/h) parallèle au vieux-port.

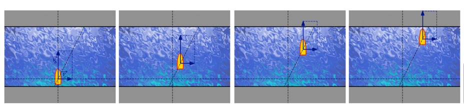


Fig 1 Fig 2

Fig 3 Fig 4 Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4

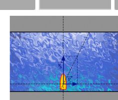


Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4

Escartefigue choisit de mettre la barre perpendiculaire au vieux-port pour "aller droit en face" chez César et fixer la vitesse à 4 noeuds! Il se retrouve au pharo (ou presque!) en 3 min, pourquoi? *(Vous donnerez les résultats avec un chiffre après la virgule.)*

UNIVERSITÉ DE PROVENCE/PÔLE TICE - PROJET SOCRATES - E. SALANçON 2005-2006

Si on considère le courant et la vitesse du bateau, le ferry-boat d'Escartefigue a une vitesse par rapport à la côte de	v = 1 1 , 3 km/h	2.0
Sa direction est de 4 5 ° par rapport à la côte.		2.0

Sommes de vecteurs (Escartefigue II)

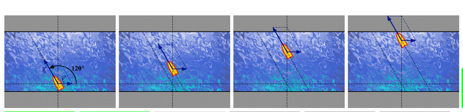


Fig 1 Fig 2

Fig 3 Fig 4 Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4

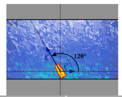


Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4

Escartefigue connaît bien son métier de capitaine de ferry-boat! Il fait son calcul : l'eau ayant un courant de 2 noeuds parallèle au vieux-port, il faut qu'il incline sa barre à 120° par rapport à la côte pour pouvoir conduire à 4 noeuds (vitesse limite dans un port) et arriver en face de la mairie, chez César! Pourquoi? *(Vous donnerez les résultats avec un chiffre après la virgule.)*

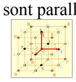
UNIVERSITÉ DE PROVENCE/PÔLE TICE - PROJET SOCRATES - E. SALANçON 2005-2006

Si on considère le courant et la vitesse du bateau, le ferry-boat d'Escartefigue a une vitesse par rapport à la côte de v = 6 , 9 km/h 2.0

Sa direction est de 9 0 ° par rapport à la côte. 2.0

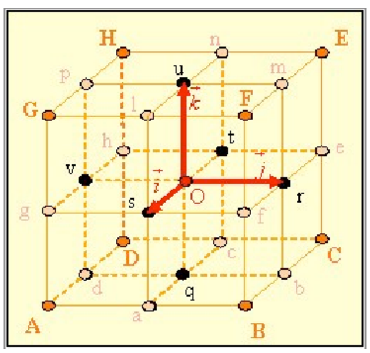
Composantes de vecteurs

Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère cartésien orthonormé direct. Le cube ci-dessous est centré à l'origine O ; ses arêtes valent 2 unités et sont parallèles aux vecteurs unitaires $\vec{i}$,$\vec{j}$ et $\vec{k}$.



Question. - Exprimez les composantes dans le repère cartésien (x, y, z) des vecteurs proposés, avec un chiffre après la virgule si nécessaire. *(ATTENTION ! Tenir compte des majuscules et des minuscules.)*

UNIVERSITÉ DE PROVENCE/PÔLE TICE - PROJET SOCRATES - E. SALANçON 2005-2006

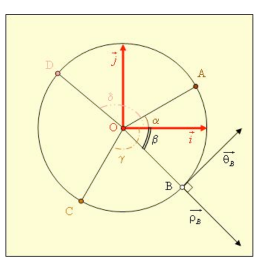


Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{Ac} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{pr}$ a pour coordonnées cartésiennes : (- 1 ; 4 ; 0) 2.0

Le vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{Ht} + 3\times\overrightarrow{nl} + \overrightarrow{Aa}$ a pour coordonnées cartésiennes : (6 ; 2 ; - 1) 2.0

Le vecteur $\vec{w} = \frac{1}{2}\times\overrightarrow{Ft} + \frac{3}{2}\times\overrightarrow{va} + 4\times\overrightarrow{qH}$ a pour coordonnées cartésiennes : (- 3 , 5 ; - 3 ; 6) 2.0

Composantes de vecteurs



Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère cartésien orthonormé direct du plan. On considère le cercle de centr O et de diamètre 2 unités. Les valeurs des angles sont : $\alpha = 30°$, $\beta = -45°$, $\gamma = -120°$ et $\delta = 135°$. Les vecteurs $\vec{\rho}_B$ et $\vec{\theta}_B$ sont les vecteurs unitaires de la base polaire associée au point B.

Question. - Exprimer les composantes des vecteurs unitaires proposés.

Expression littérale : $\vec{\rho}_A = \cos\alpha \; \vec{i} + \sin\alpha \; \vec{j}$	2.0
Expression littérale : $\vec{\theta}_A = - \sin\alpha \; \vec{i} + \cos\alpha \; \vec{j}$	2.0
$\vec{\rho}_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j}$	2.0
$\vec{\theta}_A = - \frac{1}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j}$	2.0

$\vec{\rho}_B = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j}$	2.0
$\vec{\theta}_B = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j}$	2.0

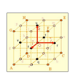
$\vec{\rho}_C = - \frac{1}{2} \vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j}$	2.0
$\vec{\theta}_C = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} - \frac{1}{2} \vec{j}$	2.0

$\vec{\rho}_D = - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j}$	2.0
$\vec{\theta}_D = - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j}$	2.0

Expression littérale : $\vec{i} = \cos\alpha \; \vec{\rho}_A - \sin\alpha \; \vec{\theta}_A$	2.0
Expression littérale : $\vec{j} = \sin\alpha \; \vec{\rho}_A + \cos\alpha \; \vec{\theta}_A$	2.0

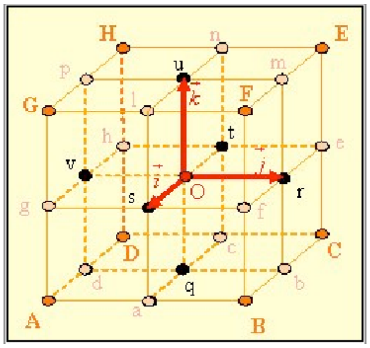
Produit scalaire

Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère cartésien orthonormé direct. Le cube ci-dessous est centré à l'origine O ; ses arêtes valent 2 unités et sont parallèles aux vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

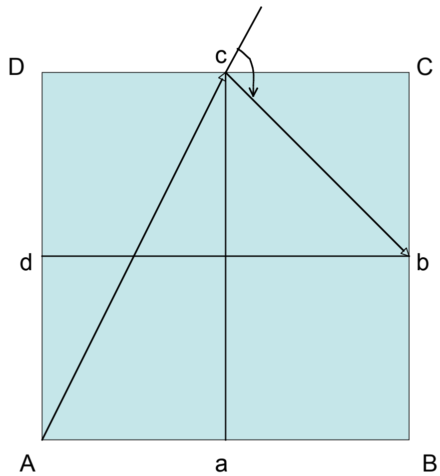


Question. - Déterminez les produits scalaires, les angles ou les normes des vecteurs proposés. Les angles sont définis entre -180° et 180°.

ATTENTION (1) : Ne pas utiliser la virgule si elle n'est pas nécessaire, et donnez un chiffre après la virgule si elle est nécessaire.
(2) : Tenir compte des majuscules et des minuscules.



Par exemple l'angle $(\overrightarrow{Ac}.\overrightarrow{cb})$ vaut (en valeur absolue) 108,4 degrés (il est plus grand que l'angle droit, qui est l'angle $(\overrightarrow{dc}.\overrightarrow{cb})$):



$\overrightarrow{Ac}.\overrightarrow{cb}$ = - 1	2.0
L'angle $(\overrightarrow{Ac},\overrightarrow{cb})$ = 7 1 , 6 °	2.0
La norme du vecteur $\vec{a} = \overrightarrow{Ac} + \overrightarrow{cb}$ est de 2 , 2 .	2.0

$\overrightarrow{dc}.\overrightarrow{cb}$ = 0	2.0
L'angle $(\overrightarrow{dc},\overrightarrow{cb})$ = 9 0 °	2.0
La norme du vecteur $\vec{b} = \overrightarrow{dc} + \overrightarrow{cb}$ est de 2 .	2.0

$\overrightarrow{GO}.\overrightarrow{On}$ = 0	2.0
L'angle $(\overrightarrow{GO},\overrightarrow{On})$ = - 9 0 °	2.0
La norme du vecteur $\vec{c} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{On}$ est de 2 , 2 .	2.0

$\overrightarrow{Fu}.\overrightarrow{uq}$ = 0	2.0
L'angle $(\overrightarrow{Fu},\overrightarrow{uq})$ = - 9 0 °	2.0
La norme du vecteur $\vec{d} = \overrightarrow{Fu} + \overrightarrow{uq}$ est de 2 , 4 .	2.0

$\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{DG}$ = 0	2.0
L'angle $(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{DG})$ = 9 0 °	2.0
La norme du vecteur $\vec{e} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DG}$ est de 4 .	2.0

$\overrightarrow{se}.\overrightarrow{ge}$ = 6	2.0
L'angle $(\overrightarrow{se},\overrightarrow{ge})$ = - 1 8 , 4 °	2.0
La norme du vecteur $\vec{f} = \overrightarrow{se} + \overrightarrow{ge}$ est de 5 .	2.0

$\overrightarrow{hs}.\overrightarrow{eq}$ = 1	2.0
L'angle $(\overrightarrow{hs},\overrightarrow{eq})$ = - 7 0 , 5 °	2.0
La norme du vecteur $\vec{g}=\overrightarrow{hs}+\overrightarrow{eq}$ est de 3 , 1 .	2.0

$\overrightarrow{pr}.\overrightarrow{AE}$ = 2	2.0
L'angle $(\overrightarrow{pr},\overrightarrow{AE})$ = 7 5 °	2.0
La norme du vecteur $\vec{h}=\overrightarrow{pr}+\overrightarrow{AE}$ est de 4 , 6 .	2.0