

MATHEMATIQUES 01
Corrigé du partiel 2 – 23 Novembre 2012

Calculatrice et documents non autorisés

Durée : 2 heures

EXERCICE 1

On considère l'équation (E), d'inconnue réelle x

$$\arctan(x+1) + \arctan(x-1) = \frac{\pi}{4}.$$

1. On pose $f(x) = \arctan(x+1) + \arctan(x-1) - \frac{\pi}{4}$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition de f . (sur 0,5)

f est défini sur $\mathbb{R}$, parce que la fonction arctangente elle-même est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Déterminer son ensemble de dérivation, puis calculer $f'(x)$. (sur 1)

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, parce que la fonction arctangente elle-même est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x+1)^2} + \frac{1}{1+(x-1)^2} = \frac{1}{x^2+2x+2} + \frac{1}{x^2-2x+2} = \boxed{\frac{2x^2+4}{x^4+4}}.$$

(c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution. (sur 1,5)

On remarque que la dérivée de f est strictement positive. $f(x)$ croît donc strictement de $-\frac{5\pi}{4}$ à $\frac{3\pi}{4}$ (qui sont les limites de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$ et $+\infty$ respectivement). Comme 0 appartient à $\left]-\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, il existe x unique tel que $f(x) = 0$.

(d) En déduire que l'équation (E) admet également une unique solution, qui de plus est positive. (sur 0,5)
Cet x est évidemment solution de (E). Il est positif parce que sinon on aurait $x < 0$ et $0 = f(x) < f(0) = -\frac{\pi}{4}$.

2. Démontrer que si x est une solution de (E) alors x vérifie l'équation $x^2 + 2x - 2 = 0$. (sur 1,5)

On pourra utiliser la formule $\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$.

Remplaçons a par $\arctan(x+1)$ et b par $\arctan(x-1)$, on obtient

$$\tan(\arctan(x+1) + \arctan(x-1)) = \frac{x+1+x-1}{1-(x+1)(x-1)} = \frac{2x}{2-x^2}$$

et, si x est solution de (E),

$$1 = \tan(\arctan(x+1) + \arctan(x-1)) = \frac{2x}{2-x^2}.$$

Ceci équivaut à $2 - x^2 = 2x$ et à $\boxed{x^2 + 2x - 2 = 0}$.

3. Résoudre (E). (sur 1)

$\Delta = 12$, les solutions sont donc $\frac{-2+\sqrt{12}}{2} = -1+\sqrt{3}$ et $\frac{-2-\sqrt{12}}{2} = -1-\sqrt{3}$. Mais la deuxième solution ne convient pas, on a vu que x est positif. On a donc $\boxed{x = -1+\sqrt{3}}$.

EXERCICE 2

1. Rappeler la définition des fonctions $\sinh$ et $\cosh$ et démontrer la formule $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ pour tout réel x . (sur 1+1)

La définition des fonctions $\sinh$ et $\cosh$ est $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. On a

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{4e^{x-x}}{4} \\ &= 1.\end{aligned}$$

2. Rappeler la définition de la fonction $\operatorname{argsinh}$. En déduire une expression explicite de $\sinh(\operatorname{argsinh}(x))$ pour tout réel x . (sur 1)

C'est la fonction réciproque de $\sinh$. Comme $\sinh$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ on a $\sinh(\operatorname{argsinh}(x)) = x$ pour tout réel x .

3. Donner une expression explicite de $\cosh(\operatorname{argsinh}(x))$ pour tout réel x . (sur 1)

On a vu que $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. On a donc $\cosh^2 x = \sinh^2 x + 1$ et, comme $\cosh x$ est positif, $\cosh x = \sqrt{\sinh^2 x + 1}$. En remplaçant x par $\operatorname{argsinh}(x)$ on obtient $\cosh(\operatorname{argsinh}(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$.

EXERCICE 3

1. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives suivantes :

$$(a) f_1(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx, \quad (b) f_2(x) = \int \frac{x^3}{1+x^4} dx, \quad (c) f_3(x) = \int (2x^2 - 1) \cos(3x) dx. \quad (\text{sur } 1+1+1,5)$$

$$f_1(x) = \int x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = \boxed{-\frac{2}{\sqrt{x}} + C} \quad (\text{défini sur }]0, +\infty[).$$

$$f_2(x) \text{ (défini sur } \mathbb{R}) = \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{1+x^4} dx = \boxed{\frac{1}{4} \ln(1+x^4) + C} \text{ parce que } \frac{4x^3}{1+x^4} \text{ est la dérivée de } \ln(1+x^4).$$

$$\begin{aligned}f_3(x) \text{ (défini sur } \mathbb{R}) &= \int (2x^2 - 1) \cos(3x) dx \quad (\text{on pose } u = 2x^2 - 1 \text{ et } v' = \cos(3x)) \\ &= (2x^2 - 1) \frac{1}{3} \sin(3x) - \int 4x \frac{1}{3} \sin(3x) dx \quad (\text{on pose } u = 4x \text{ et } v' = \frac{1}{3} \sin(3x)) \\ &= \frac{2x^2 - 1}{3} \sin(3x) + 4x \frac{1}{9} \cos(3x) - \int 4 \frac{1}{9} \cos(3x) dx \\ &= \frac{2x^2 - 1}{3} \sin(3x) + \frac{4}{9} x \cos(3x) - \frac{4}{27} \sin(3x) + C.\end{aligned}$$

2. Calculer les intégrales suivantes :

$$(a) I_1 = \int_0^1 (3\sqrt{x} - 4x) dx, \quad (b) I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(5x) dx, \quad (c) I_3 = \int_0^1 x e^{-3x} dx. \quad (\text{sur } 1+1+1,5)$$

$$I_1 = \left[3 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2x^2 \right]_0^1 = \left[2x^{\frac{3}{2}} - 2x^2 \right]_0^1 = 2 - 2 = \boxed{0}.$$

$$I_2 = \left[-\frac{1}{5} \cos(5x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{1}{5}}.$$

$$\begin{aligned}I_3 &= \int_0^1 x e^{-3x} dx \quad (\text{on pose } u = x \text{ et } v' = e^{-3x}) \\ &= \left[-\frac{1}{3} x e^{-3x} \right]_0^1 + \frac{1}{3} \int_0^1 e^{-3x} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3} x e^{-3x} - \frac{1}{9} e^{-3x} \right]_0^1 \\ &= \boxed{-\frac{4}{9} e^{-3} + \frac{1}{9}}.\end{aligned}$$

EXERCICE 4

1. Calculer les intégrales suivantes en utilisant le changement de variable indiqué :

$$(a) J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x \cos^3 x dx, \quad t = \sin x \quad (b) J_2 = \int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{1}{\cosh x} dx, \quad t = e^x. \quad (\text{sur } 2+2)$$

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x \cos^2 x \cos x dx = \int_{t=0}^{t=\frac{\sqrt{2}}{2}} t^3(1-t^2) dt.$$

Comme $t^3(1-t^2) = t^3 - t^5$ a pour primitive $\frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6}$,

$$J_1 = \left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6} \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \boxed{\frac{1}{24}}.$$

$$J_2 = \int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{2}{e^x + e^{-x}} dx = \int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{2e^x}{e^{2x} + 1} dx.$$

En utilisant le changement de variable $t = e^x$, t varie de 1 à $\sqrt{3}$ et

$$J_2 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{t^2 + 1} dt = [2 \arctan t]_1^{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\pi}{6}}.$$

2. En intégrant deux fois par parties, calculer l'intégrale

$$J_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(2x) dx. \quad (\text{sur } 2)$$

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(2x) dx \quad (\text{on pose de préférence } u = \cos(2x) \text{ et } v' = e^x) \\ &= [e^x \cos(2x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(2x) dx \quad (\text{on pose } u = \sin(2x) \text{ et } v' = e^x) \\ &= [e^x \cos(2x) + 2e^x \sin(2x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(2x) dx \\ &= -e^{\frac{\pi}{2}} - 1 - 4J_3. \end{aligned}$$

D'où $5J_3 = -e^{\frac{\pi}{2}} - 1$ et $J_3 = -\frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{5}$.