Université d'Aix-Marseille
Semestre 1

Licence de Mathématiques
2012-2013

MATHEMATIQUES 02

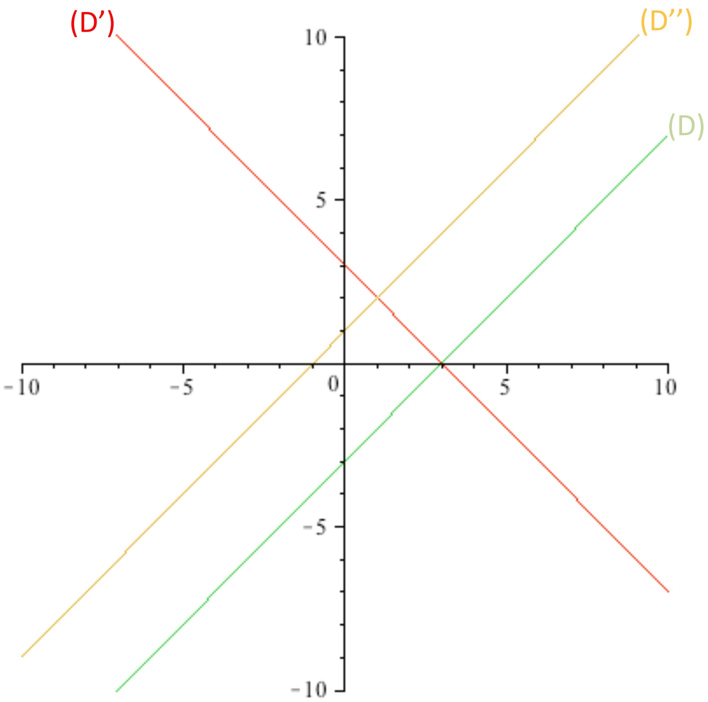
Partiel 1 corrigé – 26 Octobre 2012

Calculette et documents non autorisés

Durée : 2 heures

EXERCICE 1

On se place dans le plan euclidien. Soit (D) la droite d'équation $y = x - 3$. Soit (D') la droite perpendiculaire à (D) passant par le point $A(1, 2)$. Soit (D'') la droite parallèle à (D) et passant par le point A.



1. Donner une équation paramétrique de (D').

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \end{cases}.$$

2. Donner une équation cartésienne de (D').

$y = 3 - x$.

3. Donner une équation cartésienne de (D'').

$y = 1 + x$.

4. Calculer la distance entre (D) et (D'') (il suffit de calculer la distance d'un point de l'une des deux droites à l'autre droite).

$2\sqrt{2}$.

5. Déterminer l'angle entre $\vec{u}(\sqrt{3}+1, \sqrt{3}-1)$ et la droite (D).
En appelant $\vec{v}(1,1)$ un vecteur directeur de (D), le cosinus de cet angle est

$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|} = \frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}{\sqrt{8}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

donc cet angle est $\dfrac{\pi}{6}$.

Exercice 2

Soit (P) le plan passant par les points $A(0,1,0)$, $B(-1,1,0)$ et $C(-1,1,1)$.

1. Donner une équation paramétrique de (P).

Comme $\overrightarrow{AB} = (-1,0,0)$ et $\overrightarrow{AC} = (-1,0,1)$, une équation paramétrique de (P) est $\begin{cases} x = -t_1 - t_2 \\ y = 1 \\ z = t_2 \end{cases}$

Une autre équation paramétrique de (P) plus simple est $\begin{cases} x = t_1 \\ y = 1 \\ z = t_2 \end{cases}$

2. Donner une équation cartésienne de (P).
$y = 1$.

3. Donner une équation paramétrique de la droite (D) perpendiculaire à (P) et passant par le point $D(-\sqrt{2}, 2, \sqrt{3})$.
$\begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = 2 + t \\ z = \sqrt{3} \end{cases}$

4. Calculer la distance du point D au plan P.
La distance est 1 puisque D est dans le plan d'équation $y = 2$, parallèle à (P).

Exercice 3

Soient $A(1,1,1)$, $B(2,1,0)$ et $C(2,2,1)$ trois points de l'espace.

1. Calculer l'aire du triangle ABC.

Comme $\overrightarrow{AB} = (1,0,-1)$, $\overrightarrow{AC} = (1,1,0)$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = (1,-1,1)$, l'aire du triangle ABC est $\dfrac{1}{2}\ \|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Déterminer l'angle $\widehat{BAC}$.
$\arccos\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\ \|\overrightarrow{AC}\|}\right) = \arccos\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 4

Soient $A(1,0,1)$, $B(-1,2,1)$ et $C(1,0,-1)$ trois points de l'espace.

1. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient : $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{BC} = 0$. En donner une équation paramétrique.
Compte tenu que $\overrightarrow{AM} = (x-1, y, z-1)$, $\overrightarrow{BC} = (2,-2,-2)$ et $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{BC} = (-2y+2z-2, 2z-4+2x, -2x+2-2y)$, l'équation $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{BC} = 0$ équivaut à $\begin{cases} -2y+2z-2 = 0 \\ 2z-4+2x = 0 \\ -2x+2-2y = 0 \end{cases}$, on obtient donc la droite d'équation paramétrique
$\begin{cases} x = t \\ y = 1-t \\ z = 2-t \end{cases}$.

2. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$. En donner une équation cartésienne.
Compte tenu que $\overrightarrow{AM} = (x-1, y, z-1)$, $\overrightarrow{BC} = (2,-2,-2)$ et $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} = 2(x-1)-2y-2(z-1)$, l'équation $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ équivaut à $2(x-1)-2y-2(z-1) = 0$, on obtient donc le plan d'équation cartésienne $x - y - z = 0$.