Université de Provence
Semestre 1

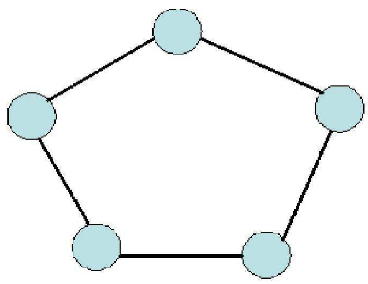
Licence Mathématiques et Informatique

MATHEMATIQUES GENERALES 1
Correction Partiel 1

Correction

Exercice 1.

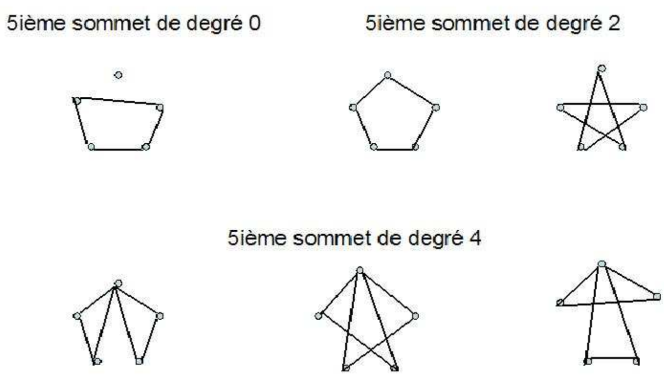
1. Voici un exemple de graphe à 5 sommets de degré 2 :



2. (a) Non, car le premier théorème du cours dit que pour tout graphe le nombre de sommets de degré impair est pair. Or si ce cinquième sommet était de degré impair, il y aurait un, soit un nombre impair, de sommets de degré impair.

   (b) Non, car pour un graphe simple à n sommets le degré maximum d'un sommet est égal à $n-1$ (si ce sommet est relié à tous les autres sommets). Le degré maximum est donc 4.

   (c) D'après les deux questions précédentes on en déduit que le degré du cinquième sommet doit être pair et strictement inférieur à 6. Ce sommet peut donc être de degré 0, 2 ou 4. Voici la représentation des différentes possibilités :



Exercice 2.

1. Pour montrer que f est injective montrons que $f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$.
   Soient x et $x' \in \mathbb{R} - \{1\}$ tels que $f(x) = f(x')$,
   alors $\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{x'-1}$, donc $x' - 1 = x - 1$, et par conséquent $x = x'$.
   On en déduit que f est injective.
2. On a :
   $$\forall y \in \mathbb{R}^*, \quad \exists x = 1 + \frac{1}{y} \in \mathbb{R} - \{1\} \quad \text{telque} \quad f(x) = \frac{1}{x-1} = y.$$
   Donc f est surjective et on a :
   $$f^{-1}(y) = 1 + \frac{1}{y}.$$
3. Par définition de l'image inverse on a :
   $$g^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} - \{0\} / g(x) = 0\}.$$
   Or il n'existe par d'élément de $\mathbb{R} - \{0\}$ dont le carré de son inverse soit nul on en déduit que :
   $$g^{-1}(\{0\}) = \emptyset.$$
   Par conséquent l'élément $y = 0 \in \mathbb{R}$ n'a pas d'antécédent par l'application g et donc g n'est pas surjective et à fortiori pas bijective.
4. Par définition de l'image on a :
   $$Im(g) = \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad g(x) = y\}.$$
   Pour montrer l'égalité entre les deux ensembles $Im(g)$ et $\mathbb{R}_+^*$, on va montrer que chacun est inclus dans l'autre.
   - Soit $y \in Im(g)$ alors, par définition de l'image de g, $\exists x \in \mathbb{R} - \{0\}$ $y = g(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$ donc $y > 0$ et par conséquent $y \in \mathbb{R}_+^*$.
     On a donc bien $Im(g) \subset \mathbb{R}_+^*$.
   - Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$ alors $\exists x = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$ tel que $y = \dfrac{1}{x^2} = g(x)$. Par conséquent $y \in Im(g)$.
     Et on a bien $\mathbb{R}_+^* \subset Im(g)$.
5. L'application f est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$.
   L'application g est définie sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
   Par conséquent on peut définir l'application $g \circ f$ qui sera définie de $\mathbb{R} - \{1\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, puisque l'ensemble des valeurs de f est égal à l'ensemble de définition de g.
   Par contre $f \circ g$ n'existe pas puisque l'ensemble des valeurs de g n'est pas inclus dans l'ensemble de définition de f.

Exercice 3.

On commence par calculer le discriminant :
$$\Delta = (-\sqrt{2})^2 - 4.1.1 = 2 - 4 = -2.$$
Les racines de cette équation sont donc complexes conjuguées et égales à :
$$z_1 = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}.$$
On a $|z_1| = |z_2| = 1$, $Arg(z_1) = -\frac{\pi}{4}$ et $Arg(z_2) = \frac{\pi}{4}$.
Donc $z_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

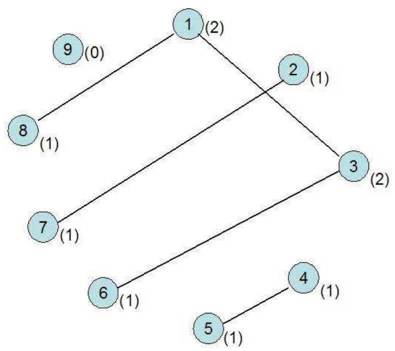
Exercice 4. Remarquons d'abord que d'après la définition de l'union de deux ensembles A et B on a toujours $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$.
De même d'après la définition de l'intersection de deux ensembles A et B on a toujours $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$.

- Montrons dans un premier temps que $B \subset A$.
  Soit $x \in B \Longrightarrow x \in A \cup B$, car on a toujours $B \subset A \cup B$.
  Or d'après l'hypothèse $A \cup B = A \cap C$ et comme on a toujours $A \cap C \subset A$, on en déduit que $x \in A$.
- Montrons maintenant que $A \subset C$.
  Soit $x \in A \Longrightarrow x \in A \cup B$, car on a toujours $A \subset A \cup B$.
  Or d'après l'hypothèse $A \cup B = A \cap C$ et comme on a toujours $A \cap C \subset C$, on en déduit que $x \in C$.

Finalement on a bien
$$B \subset A \subset C.$$

Exercice 5.

1. Voici le graphe dont les sommets représentent les nombres de 1 à 9 dans lequel deux sommets sont reliés si et seulement si la somme des nombres correspondants est un carré parfait (soit ici $4 = 2^2$ ou $9 = 3^2$ car le prochain carré parfait est $25 = 5^2$ qui est plus grand que la somme de deux quelconques de ces nombres). Le degré de chaque sommet est indiqué entre parenthèse.



2. Le seul chemin de longueur 3 est celui qui relie les quatre sommets $\{8 - 1 - 3 - 6\}$.
3. Le graphe n'est pas connexe. Il y a quatre composantes connexes à savoir :

$$\{8 - 1 - 3 - 6\},$$
$$\{2 - 7\},$$
$$\{4 - 5\},$$
$$\{9\}.$$

Exercice 6.

Remarquons tout d'abord que le réel -8 peut s'écrire sous forme géométrique comme suit :

$$-8 = 8e^{i\pi}.$$

Si on cherche la racine z sous la forme géométrique on pose $z = \rho e^{i\theta}$ où ρ est le module de z et θ est son argument. La racine cubique de -8, z doit donc vérifier :

$$z^3 = \rho^3 e^{i3\theta} = 8e^{i\pi}.$$

On en déduit que $\rho = 8^{1/3} = 2$ et que $3\theta = \pi + 2k\pi$ pour $k = 0, 1$ et 2.
Le module des trois racines est égal à 2 et les arguments sont respectivement $\frac{\pi}{3}$, π et $\frac{5\pi}{3}$.
Les trois solutions sont donc :

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3},$$

$$z_2 = 2e^{i\pi} = -2,$$

$$z_3 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 1 - i\sqrt{3}.$$

Une seule racine a une partie imaginaire négative c'est z_3 dont la partie imaginaire est égale à $-\sqrt{3}$.

Exercice 7.

L'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z - i| = |z + i|$ sont les points M qui sont sur la médiatrice du segment AB où l'affixe de A est égal à $+i$ et l'affixe de B est égal à $-i$. Ce sont donc les points du plan qui ont une affixe réelle, par conséquent l'ensemble des points M est l'axe des réels.